Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 11 (1872), p. 83-93

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__83_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 631

(voir 2e série, t. I, p. 383);

PAR M. LE BESGUE.

Cette question doit être posée ainsi, en y corrigeant une erreur de copie et une faute d'impression,

Si l'équation $x^2 = y^4 + ay^2z^2 + bz^4$ *est résolue par* $r^2 = t^4 + at^2u^2 + bu^4$, *elle le sera aussi par*

(A) $x = r^4 - (a^2 - 4b)t^4u^4,\quad y = t^4 - bu^4,\quad z = 2rtu.$

Voici la vérification directe.

Remplaçant x et z par leurs valeurs, on trouve réduction faite,

$$[r^4 + (a^2 - 4b)t^4u^4]^2 = (y^2 + 2ar^2t^2u^2)^2.$$

Prenant la racine carrée, il vient, réduction faite,

$$y^2 = (r^2 - at^2u^2)^2 - 4bt^4u^4.$$

Remplaçant y par sa valeur, il vient, réduction faite,

$$(r^2 - at^2u^2)^2 = (t^4 + bu^4)^2.$$

Prenant la racine carrée, il vient

$$r^2 = t^4 + at^2u^2 + bu^4.$$

Cette dernière équation est la relation qui doit exister entre r, t, u pour que les formules (A) donnent une solution de

$$x^2 = y^4 + ay^2z^2 + bz^4.$$

Dans ce calcul, il y avait deux racines carrées à prendre; les signes des racines pouvaient changer, ainsi la seconde extraction aurait donné, en prenant le signe —,

$$r^2 - at^2u^2 = -t^4 - bu^4,$$

et, si la relation

$$r^2 = -t^4 + at^2u^2 - bu^4$$

pouvait être satisfaite, on pourait encore employer les formules (A).

Si l'on prend pour application l'équation

$$x^2 = y^4 + 5y^2z^2 + 3z^4,$$

comme

$$x = 3, \quad y = z = 1$$

donnent

$$3^2 = 1^4 + 5.1^2.1^2 + 3.1^4 \quad (r^2 = t^4 + 5t^2u^2 + 3u^4),$$

les formules (A) donnent une nouvelle solution

$$x = 68, \quad y = -2, \quad z = 6;$$

comme

$$r^2 = -t^4 + 5t^2u^2 - 3u^4$$

est satisfaite par

$$r = t = u = 1,$$

les formules (A) donnent encore la solution

$$x = 12, \quad y = 2, \quad z = 2.$$

Voici comment les formules (A) ont été trouvées. Dans l'équation $x^2 = y^4 + ay^2z^2 + bz^4$, on a fait $z = 2z_1$, d'où l'on a tiré

$$x^2 = (y^2 + 2az_1^2)^2 - 4(a^2 - 4b)z_1^4,$$

ou bien encore

$$(y^2 + 2az_1^2)^2 - x^2 = 4(a^2 - 4b)z_1^4,$$

puis on a décomposé $4(a^2-4b)z_1^4$ en deux facteurs, l'un que l'on a supposé égal à $y^2+2az_1^2+x$, et l'autre par conséquent égal à y^2+2az_1-x. En posant $z_1=rs$ et prenant $2r^4$, $2(a^2-4b)s^4$ pour les deux facteurs de $4(a^2-4b)z_1^4$, on a eu les deux équations

$$y^2+2ar^2s^2+x=2r^4,\quad y^2+2ar^2s^2-x=2(a^2-4b)s^4;$$

de là, par soustraction,

$$x=r^4-(a^2-4b)s^4,$$

et, par addition,

$$y^2=r^4-2ar^2s^2+(a^2-4b)s^4,$$

ou bien

$$y^2=(r^2-as^2)^2-4bs^4,$$

qui revient à

$$(r^2-as^2+y)(r^2-as^2-y)=4bs^4.$$

En posant $s=tu$ et décomposant $4bs^4$ en $2t^4$, $2bu^4$, on a fait

$$r^2-at^2u+y=2t^4,\quad r^2-at^2u^2-y=2bu^4,$$

d'où l'on a tiré, par soustraction,

$$y=t^4-bu^4,$$

et, par addition,

$$r^2=t^4+at^2u^2+bu^4.$$

Comme

$$z=2z_1=2rs=2rtu$$

et

$$x=r^4-(a^2-4b)s^4=r^4-(a^2-4b)t^4u^4,$$

l'équation

$$x^2=y^4+ay^2z^2+bz^4$$

se trouve résolue par les formules (A), en admettant la condition

$$r^2=t^4+at^2u^2+bu^4.$$

Nota. — La décomposition de $4bt^4u^4$ en $-2t^4$, $-2bu^4$ aurait donné la condition

$$r^2 = -t^4 + at^2u^2 - bu^4.$$

Ces décompositions donnent rarement des solutions complètes; mais, dans certains cas, elles font reconnaître l'impossibilité de diverses équations biquadratiques par la méthode de *non congruence* qui consiste à trouver un nombre entier m (module) tel que, les deux membres de l'équation $P = Q$ étant divisés par m, les restes supposés positifs et inférieurs à m ne sauraient être égaux.

Question 990

(voir 2ᵉ série, t. IX, p. 192);

PAR M. ERNEST PADOVA,

Élève à l'École Normale de Pise.

On donne un tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ *et un point* O. *Désignant par* V_1 *le volume* $OA_2A_3A_4$, *par* V_2 *le volume* $OA_1A_3A_4,\ldots$, *on aura la relation*

$$\Sigma\overline{OA}_1^2 V_1^2 + 2\Sigma\overline{OA_2}\,\overline{OA_3}\cos\widehat{A_2OA_3}V_2V_3 = 0.$$

Les volumes V_1, V_2, V_3, V_4 *doivent être affectés d'un signe tel que leur somme soit égale au volume du tétraèdre donné.* (H. FAURE.)

Si l'on appelle x_1, y_1, z_1, t_1 les perpendiculaires abaissées du point O sur les faces opposées aux sommets A_1, A_2, A_3, A_4, respectivement, du tétraèdre donné, et $x', y'\ z', t'$ les perpendiculaires abaissées de ces sommets mêmes sur les faces opposées, on aura

$$(1)\quad V_1:\Delta = x_1:x',\ V_2:\Delta = y_1:y',\ V_3:\Delta = z_1:z',\ V_4:\Delta = t_1:t',$$

où Δ représente le volume du tétraèdre donné.

Du moment que l'on doit avoir

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = \Delta,$$

il faut que l'on ait

$$\frac{x_1}{x'} + \frac{y_1}{y'} + \frac{z_1}{z'} + \frac{t_1}{t'} = 1.$$

En substituant pour V_1, V_2, V_3, V_4 leurs valeurs déduites des équations (1) dans l'équation à démontrer, et en divisant l'équation qui en résulte par Δ^2, nous aurons

$$\Sigma \overline{OA}_1^2 \frac{x_1^2}{x'^2} + 2\Sigma \overline{OA_2}\,\overline{OA_3} \cos \widehat{A_2OA_3} \frac{x_1}{x'}\frac{y_1}{y'} = 0.$$

Pour démontrer cette nouvelle équation, il faut et il suffit de montrer que, si à partir du point O, sur les droites qui de ce point vont aux quatre sommets du tétraèdre, on coupe des segments respectivement égaux à $OA_1 \frac{x_1}{x'}$, $OA_2 \frac{y_1}{y'}$, $OA_3 \frac{z_1}{z'}$, $OA_4 \frac{t_1}{t'}$, ces segments se font équilibre entre eux quand on les considère comme des forces.

Pour cela, il suffit de projeter ces droites sur les perpendiculaires aux faces du tétraèdre, et de montrer que toutes ces projections sont nulles. Or la projection sur la perpendiculaire à la face $A_2\,A_3\,A_4$ donne

$$OA_1 \frac{x_1}{x'} \cos x OA_1 + OA_2 \frac{y_1}{y'} \cos x OA_2$$
$$+ OA_3 \frac{z_1}{z'} \cos x OA_3 + OA_4 \frac{t_1}{t'} \cos x OA_4,$$

et puisque

$$OA_1 \cos x OA_1 = x_1 - x',$$
$$OA_2 \cos x OA_2 = OA_3 \cos x OA_3 = OA_4 \cos x OA_4 = x_1,$$

cette projection devient

$$x_1\left(\frac{x_1}{x'} + \frac{y_1}{y'} + \frac{z_1}{z'} + \frac{t_1}{t'} - 1\right),$$

et par conséquent est égale à zéro. Donc les forces $OA_1\frac{x_1}{x'}$, $OA_2\frac{y_1}{y'}$, $OA_3\frac{z_1}{z'}$, $OA_4\frac{t_1}{t'}$, se font équilibre autour du point O, et la question est résolue.

Question 1039

(voir 2e série, t. X, p. 384);

PAR M. WILLIAM MYNN PHORNTON,
Étudiant à l'Université de Virginie (États-Unis).

Trouver l'équation du lieu des sommets des paraboles inscrites à un triangle rectangle, celle du lieu des pieds des normales issues du sommet de l'angle droit, et celle du lieu des seconds points de rencontre de ces normales avec les courbes. (H. LEMONNIER.)

Prenant les côtés a et b du triangle pour axes, l'équation de la courbe est de la forme

$$(1)\qquad \sqrt{\frac{y}{\beta}} \pm \sqrt{\frac{x}{\alpha}} = 1;$$

et, pour exprimer qu'elle est aussi tangente à l'hypoténuse, on a la condition

$$(2)\qquad \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} = 1.$$

I. Observant maintenant que la perpendiculaire menée de l'origine à la corde focale

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$$

passe par le foyer, et qu'une droite menée par le foyer et coupant l'axe des x sous un angle égal à $\operatorname{arctang}\frac{\beta}{\alpha}$

est l'axe de la courbe, on obtient aisément, pour l'équation de cet axe,

$$(3)\qquad \frac{y}{\beta}-\frac{x}{\alpha}=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}.$$

Divisant l'équation (3) par l'équation (1), on a

$$\sqrt{\frac{y}{\beta}}\mp\sqrt{\frac{x}{\alpha}}=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2},$$

d'où, par addition et soustraction avec l'équation (1), et en tenant compte de l'équation (2),

$$\frac{x}{\beta^3}=\frac{y}{\alpha^3}=\frac{\alpha\beta}{(\alpha^2+\beta^2)^2}=\frac{\left(ax^{\frac{1}{3}}+by^{\frac{1}{3}}\right)^3}{(\alpha\beta)^3}=\frac{\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}}{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{3}{2}}},$$

et enfin

$$ax^{\frac{1}{3}}+by^{\frac{1}{3}}=\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)^2.$$

II. L'équation générale de la normale en un point (x, y) est

$$(x'-x)\sqrt{\alpha x}=(y'-y)\sqrt{\beta y};$$

mais, puisqu'elle passe par l'origine,

$$\alpha x^3=\beta y^3,$$

l'équation devient donc

$$(4)\qquad \alpha^{\frac{1}{3}}x'=\beta^{\frac{1}{3}}y'.$$

Pour trouver le lieu du pied de la normale, on élimine α et β entre les équations (2), (4) et l'équation de la courbe

$$\sqrt{\frac{y}{\beta}}+\sqrt{\frac{x}{\alpha}}=1;$$

il vient

$$\frac{x}{\beta^{\frac{1}{3}}}=\frac{y}{\alpha^{\frac{1}{3}}}=\frac{(ax^3+by^3)^{\frac{1}{3}}}{(\alpha\beta)^{\frac{1}{3}}}=\frac{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{\left(\alpha^{\frac{2}{3}}+\beta^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\alpha\beta}{\left(\alpha^{\frac{2}{3}}+\beta^{\frac{2}{3}}\right)^2},$$

et enfin

$$ax^3 + by^3 = (x^2 + y^2)^2.$$

III. Pour trouver le lieu des seconds points de rencontre, on élimine α et β entre les équations (2), (4) et l'équation de la courbe

$$\sqrt{\frac{y}{\beta}} - \sqrt{\frac{x}{\alpha}} = 1;$$

il vient ainsi

$$ax^3 + by^3 = (x^2 - y^2)^2.$$

Note. — La même question a été résolue par M. Gambey, professeur au lycée de Saint-Étienne.

Question 1045

(voir 2e série, t. X, p 506) ;

PAR M. A. DUREL,

Élève de Mathématiques élémentaires au lycée du Havre.

La différence des contours de deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés supérieur à cinq, l'un inscrit et l'autre circonscrit à un même cercle, est moindre que le côté du polygone inscrit. (LIONNET.)

Soient n le nombre des côtés des deux polygones, a le côté du polygone inscrit et a' celui du polygone circonscrit : il faut démontrer que l'on a

$$na' - na < a,$$

ou

$$(1) \qquad na' < (n+1)a.$$

Or on a

$$a' = 2r \operatorname{tang} \frac{2\pi}{2n} = 2r \operatorname{tang} \frac{\pi}{n},$$

$$a = 2r \sin \frac{2\pi}{2n} = 2r \sin \frac{\pi}{n};$$

l'inégalité peut donc être mise sous la forme

$$2nr \operatorname{tang} \frac{\pi}{n} < (n+1) 2r \sin \frac{\pi}{n},$$

ou

$$2nr \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} < (n+1) 2r \sin \frac{\pi}{n},$$

et, en divisant les deux membres par $2r \sin \frac{\pi}{n}$,

$$n \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n}} < n+1 ;$$

d'où l'on tire

$$(2) \qquad \cos \frac{\pi}{n} > \frac{n}{n+1}.$$

Or on a

$$\cos \frac{\pi}{n} > 1 - \frac{\pi^2}{2n^2};$$

par suite, si l'inégalité $1 - \frac{\pi}{2n^2} > \frac{n}{n+1}$ est satisfaite, l'inégalité (2) sera vraie, *à fortiori*,

$$\frac{\pi^2}{2n^2} > 1 - \frac{n}{n+1}, \quad \text{ou} \quad \frac{\pi^2}{2n^2} < \frac{1}{n+1},$$

$$\pi^2 < \frac{2n^2}{n+1}, \quad \text{ou} \quad \pi^2 < \frac{2n}{1+\frac{1}{n}}.$$

Si n est égal à 6, l'inégalité subsiste; car π^2 est plus petit que $\frac{12}{1+\frac{1}{6}} = \frac{72}{7}$. Or, à mesure que le nombre n des côtés augmente, le numérateur $2n$ augmente, le dénominateur diminue; par suite, l'inégalité reste vraie.

Question 1047

(voir 2ᵉ série, t. X, p. 557);

PAR M. H. HELDERMAN,

Professeur de Mathématiques, ancien Élève de l'École Polytechnique de Delft.

A, B, C *étant les angles d'un triangle rectiligne, on a*

$$\frac{\cos A}{\sin B \sin C} + \frac{\cos B}{\sin A \sin C} + \frac{\cos C}{\sin A \sin B} = 2.$$

(J.-CH. DUPAIN.)

On sait qu'on peut déduire, par une simple substitution, des formules fondamentales

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B,$$
$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B,$$

les suivantes

$$(1)\left\{\begin{aligned} \sin(A+B+C) = &+ \sin A \cos B \cos C + \sin B \cos A \cos C \\ &+ \sin C \cos A \cos B - \sin A \sin B \sin C, \end{aligned}\right.$$

$$(2)\left\{\begin{aligned} \sin(A+B-C) = &+ \sin A \cos B \cos C + \sin B \cos A \cos C \\ &- \sin C \cos A \cos B + \sin A \sin B \sin C, \\ \sin(A+C-B) = &+ \sin A \cos B \cos C - \sin B \cos A \cos C \\ &+ \sin C \cos A \cos B + \sin A \sin B \sin C, \\ \sin(B+C-A) = &- \sin A \cos B \cos C + \sin B \cos A \cos C \\ &+ \sin C \cos A \cos B + \sin A \sin B \sin C. \end{aligned}\right.$$

La somme des équations (1) et (2) donne

$$(3)\left\{\begin{aligned} +4 \sin A \sin B \sin C = &\sin(A+B-C) + \sin(A+C-B) \\ &+ \sin(B+C-A) - \sin(A+B+C). \end{aligned}\right.$$

En ayant égard que la somme des angles d'un triangle rectiligne est égale à π, la formule (3) devient

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C;$$

d'où l'on peut déduire

$$\frac{2 \sin A \cos A}{2 \sin A \sin B \sin C} + \frac{2 \sin B \cos B}{2 \sin A \sin B \sin C} + \frac{2 \sin C \cos C}{2 \sin A \sin B \sin C} = 2,$$

ou

$$\frac{\cos A}{\sin B \sin C} + \frac{\cos B}{\sin A \sin C} + \frac{\cos C}{\sin A \sin B} = 2.$$

C. Q. F. D.

Note. — La même question a ete resolue par MM. C. Guesnet, eleve du lycee du Havre; H. Lez; Lecornu, eleve du lycee de Caen; A Pellissier, capitaine d'Artillerie; S. Dautheville; E. Kruschwitz, etudiant, a Berlin.