LIONNET

Note sur les questions 1045 et 1026

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 11 (1872), p. 78-81

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__78_0>

NOTE SUR LES QUESTIONS 1045 ET 1026;

PAR M. LIONNET.

1. THÉORÈME. — *La différence des périmètres p et* P *de deux polygones réguliers d'un même nombre n de côtés supérieur à* 5, *l'un inscrit et l'autre circonscrit au même cercle, est moindre que le côté* AB *du polygone inscrit.*

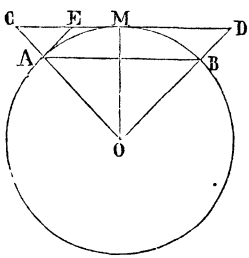
Soit CD le côté de P, tangent au milieu M de l'arc AB et divisé par ce point en deux parties égales. Il s'agit de démontrer que, pour $n > 5$, on a

$$\mathrm{CD}.n - \mathrm{AB}.n < \mathrm{AB} \quad \text{ou} \quad \mathrm{CD} - \mathrm{AB} < \frac{\mathrm{AB}}{n},$$

ou

$$(1) \qquad \mathrm{CA} < \frac{1}{n},$$

en remplaçant CD, AB par les rayons OC, OA qui leur sont proportionnels, et prenant OA pour unité. Mais



la tangente CM, égale à $\frac{\mathrm{P}}{2n}$, étant moyenne proportionnelle entre la sécante entière $\mathrm{CA} + 2$ et le segment CA, on a

$$\frac{P^2}{4n^2} = (CA + 2)\,CA.$$

Remplaçant CA par $\frac{1}{n}$ et multipliant les deux membres par n^2, on a

$$(2) \qquad \left(\frac{P}{2}\right)^2 < 2n + 1.$$

Cette inégalité, équivalente à (1), devenant $12 < 13$ pour $n = 6$, est vérifiée par cette valeur de n. Elle l'est aussi pour $n > 6$, puisque, n augmentant, P diminue; donc le théorème est démontré.

Remarque I. — Pour $n < 6$, le premier membre de (2) est supérieur à 12, tandis que le second est égal ou inférieur à 11; donc alors l'inégalité a lieu en sens contraire; ce qui justifie la restriction $n > 5$.

Remarque II. — Si l'on désigne par P' le périmètre du polygone circonscrit de $2n$ côtés, par b, b' les côtés de P, P', et qu'on mène au point A la tangente AE jusqu'à sa rencontre avec CD, les triangles semblables CAE, CMO, dans lesquels on a

$$AE = \frac{b'}{2}, \quad CM = \frac{b}{2}, \quad OM = 1,$$

donneront

$$CA = \frac{bb'}{4} = \frac{Pb'}{4n} = \frac{bP'}{8n} = \frac{PP'}{8n^2};$$

d'où, en remplaçant CA par $\frac{1}{n}$, on déduit les inégalités

$$(3) \qquad Pb' < 4, \quad bP' < 8, \quad PP' < 8n,$$

dont chacune, équivalente à (1), peut servir comme l'inégalité (2) à la démonstration du théorème.

2. Théorème. — *L'excès de la circonférence sur le*

périmètre d'un polygone régulier inscrit est moindre que le côté du polygone.

L'inégalité $2\pi - AB.n < AB$ ou $2\pi < AB(n+1)$ qu'il s'agit de démontrer est, pour $n > 5$, une conséquence immédiate du théorème (1); car on a évidemment $2\pi - p < P - p$. On la vérifie d'ailleurs très-facilement pour $n < 6$, en observant qu'on a $\pi^2 < 10$ et que les valeurs de AB correspondantes aux valeurs 3, 4, 5 de n sont respectivement

$$\sqrt{3},\quad \sqrt{2},\quad \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.$$

3. Théorème. — *On peut inscrire et circonscrire à un même cercle deux polygones réguliers semblables d'un assez grand nombre n de côtés pour que la différence d_n de leurs périmètres soit moindre qu'une partie aliquote du côté a_n du polygone inscrit, aussi petite qu'on voudra.*

On sait qu'on a

$$d_{2n} < \tfrac{1}{4} d_n,\quad a_n < 2a_{2n},\quad d_6 < a_6.$$

Il en résulte

$$d_{12} < \tfrac{1}{4} d_6 < \tfrac{1}{4} a_6 < \tfrac{1}{2} a_{12}.$$

On trouve pareillement

$$d_{24} < \tfrac{1}{4} d_{12} < \tfrac{1}{8} a_{12} < \tfrac{1}{4} a_{24},$$

et ainsi de suite; donc on a généralement

$$d_{6.2^k} < \frac{1}{2^k} a_{6.2^k} \quad \text{ou} \quad d_n < \frac{1}{2^k} a_n$$

en posant $6.2^k = n$. Le nombre entier k étant aussi grand qu'on voudra, le théorème est démontré.

4. Théorème. — *On peut inscrire à un cercle un*

polygone régulier d'un assez grand nombre de côtés pour que l'excès de la circonférence sur le périmètre du polygone soit moindre qu'une partie aliquote de son côté aussi petite qu'on voudra.

Ce théorème, démontré par M. Gerono (*), est une conséquence immédiate du précédent. Car on a évidemment $2\pi - p < P - p$.

Remarque. — Les théorèmes 1 et 2 se démontrent facilement au moyen des inégalités connues

$$a - \sin a < \frac{a^3}{6}, \quad 1 - \cos a < \frac{a^2}{2};$$

mais nous avons préféré une démonstration géométrique.