LAGUERRE

Sur les formules fondamentales de la théorie des surfaces

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 11 (1872), p. 60-66

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__60_1>

SUR LES FORMULES FONDAMENTALES DE LA THÉORIE DES SURFACES;

PAR M. LAGUERRE.

(Extrait d'une Lettre adressée à M. Ch. Brisse.)

I.

... Les beaux travaux de MM. Bonnet, Bour et Codazzi ont notablement perfectionné la théorie des surfaces; les formules fondamentales de cette théorie me paraissent pouvoir être exposées d'une façon assez simple....

Je suppose les différents points de la figure rapportés à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, et les coordonnées des points de la surface exprimées en fonction de deux variables indépendantes u et v.

Soient (u) et (v) les courbes de la surface obtenues en donnant respectivement à u et à v des valeurs constantes.

Imaginons un trièdre trirectangle MX, MY, MZ, qui se déplace de façon que son sommet M décrive la surface, l'arête MZ lui étant normale; les deux arêtes MX et MY sont constamment situées dans le plan tangent en M, mais leur mouvement reste indéterminé.

Soient

$$\begin{array}{lll} \cos\alpha, & \cos\beta, & \cos\gamma, \\ \cos\xi, & \cos\upsilon, & \cos\zeta, \\ \cos\lambda, & \cos\mu, & \cos\nu, \end{array}$$

les cosinus que font respectivement les axes MX, MY, MZ avec les axes fixes Ox, Oy, Oz.

Si l'on passe d'un point quelconque de la surface (u, v) à un point infiniment voisin $(u + du, v + dv)$, d'après une formule bien connue sur le déplacement infiniment petit d'un corps invariable (*), on a les neuf relations suivantes :

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} d\cos\alpha = +(\mathrm{M}\,du + \mathrm{N}\,dv)\cos\xi + (\mathrm{P}\,du + \mathrm{S}\,dv)\cos\lambda, \\ d\cos\xi = -(\mathrm{M}\,du + \mathrm{N}\,dv)\cos\alpha - (\mathrm{R}\,du + \mathrm{Q}\,dv)\cos\lambda, \\ d\cos\lambda = -(\mathrm{P}\,du + \mathrm{S}\,dv)\cos\alpha + (\mathrm{R}\,du + \mathrm{Q}\,dv)\cos\xi, \\ d\cos\beta = +(\mathrm{M}\,du + \mathrm{N}\,dv)\cos\upsilon + (\mathrm{P}\,du + \mathrm{S}\,dv)\cos\mu, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

Je n'écris que les quatre premières de ces relations, les autres s'en déduisant immédiatement; M, N, P, Q, R et S désignent six fonctions données de u et de v.

(*) Voir *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. VI, la Note de M. Picart : *Nouvelle théorie du déplacement continu d'un corps solide*, p. 160.

II.

Comme les développements qui suivent s'appuient surtout sur les formules données (*) par M. Serret pour les lignes à double courbure, je transcrirai ici ces formules.

Soient

$$\begin{array}{lll} \cos a, & \cos b, & \cos c, \\ \cos x, & \cos y, & \cos z, \\ \cos l, & \cos m, & \cos n, \end{array}$$

les cosinus des angles que font respectivement, avec les axes fixes Ox, Oy et Oz, la tangente à la courbe, la normale principale et l'axe du plan osculateur.

Désignons de plus par ds un élément infiniment petit de la courbe, par r le rayon de courbure et par t le rayon de torsion en ce point.

Les formules de M. Serret sont contenues dans le tableau suivant :

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} d\cos a = \cos x\,\dfrac{ds}{r}, \quad d\cos l = \cos x\,\dfrac{ds}{t}, \\[2ex] d\cos b = \cos y\,\dfrac{ds}{r}, \quad d\cos m = \cos y\,\dfrac{ds}{t}, \\[2ex] d\cos c = \cos z\,\dfrac{ds}{r}; \quad d\cos n = \cos z\,\dfrac{ds}{t}; \\[2ex] \quad d\cos x = -\cos a\,\dfrac{ds}{r} - \cos l\,\dfrac{ds}{t}, \\[2ex] \quad d\cos y = -\cos b\,\dfrac{ds}{r} - \cos m\,\dfrac{ds}{t}, \\[2ex] \quad d\cos z = -\cos c\,\dfrac{ds}{r} - \cos n\,\dfrac{ds}{t}. \end{array}\right.$$

Elles sont, on le voit facilement, contenues dans les formules générales (1).

(*) Voir *Calcul différentiel* de Lacroix, t. II, p. 284 et 299.

Je suppose maintenant, en conservant toutes les notations précédentes, que la ligne considérée soit tracée sur la surface donnée.

La droite MZ étant normale à la surface, en désignant par i l'angle que fait la courbe avec l'axe MX, et par ϖ l'angle que fait la normale principale de la courbe avec la normale à la surface, les formules d'Euler donnent le système de formules suivant :

$$\begin{aligned}
&\cos a \cos\alpha + \cos b \cos\beta + \cos c \cos\gamma = \cos i,\\
&\cos a \cos\xi + \cos b \cos\upsilon + \cos c \cos\zeta = \sin i,\\
&\cos a \cos\lambda + \cos b \cos\mu + \cos c \cos\nu = 0;\\
&\cos x \cos\alpha + \cos y \cos\beta + \cos z \cos\gamma = \sin\varpi \sin i,\\
&\cos x \cos\xi + \cos y \cos\upsilon + \cos z \cos\zeta = -\sin\varpi \cos i,\\
&\cos x \cos\lambda + \cos y \cos\mu + \cos z \cos\nu = \cos\varpi;\\
&\cos l \cos\alpha + \cos m \cos\beta + \cos n \cos\gamma = -\cos\varpi \sin i,\\
&\cos l \cos\xi + \cos m \cos\upsilon + \cos n \cos\zeta = \cos\varpi \cos i,\\
&\cos l \cos\lambda + \cos m \cos\mu + \cos n \cos\nu = \sin\varpi.
\end{aligned}$$

Si maintenant nous différentions ces neuf équations en tenant compte des relations (1) et (2), nous obtiendrons, après quelques réductions faciles, le tableau suivant :

$$(\mathrm{A})\quad\left\{\begin{aligned}
&-\frac{ds}{r}\sin\varpi = di + \mathrm{M}\,du + \mathrm{N}\,dv,\\
&\frac{ds}{r}\cos\varpi = (\mathrm{P}\,du + \mathrm{S}\,dv)\cos i - (\mathrm{R}\,du + \mathrm{Q}\,dv)\sin i,\\
&-d\varpi + \frac{ds}{t} = -(\mathrm{P}\,du + \mathrm{S}\,dv)\sin i - (\mathrm{R}\,du + \mathrm{Q}\,dv)\cos i,
\end{aligned}\right.$$

qui donne les trois premières équations fondamentales de la théorie des courbes tracées sur les surfaces.

Les quantités $d\cos\alpha$, $d\cos\beta$,... étant, par leur définition même, des différentielles exactes, en exprimant que cette condition est remplie, on obtiendra les trois relations contenues dans le tableau suivant :

$$(B)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{dM}{dv} - \frac{dN}{du} = RS - PQ, \\ &\frac{dP}{dv} - \frac{dS}{du} = MQ - RN, \\ &\frac{dR}{dv} - \frac{dQ}{du} = NP - MS. \end{aligned} \right.$$

III.

Supposons maintenant que les courbes (u) et (v) déterminent sur la surface un réseau orthogonal, et que les axes MX et MY soient, en chaque point, tangents aux deux courbes qui s'y croisent à angle droit.

En désignant par ds un élément linéaire quelconque de la surface, soit

$$ds^2 = E^2\, du^2 + G^2\, dv^2,$$

d'où

$$ds \cos i = E\, du, \quad ds \sin i = G\, dv,$$

et

$$\begin{aligned} ds \cos a &= E\, du \cos \alpha + G\, dv \cos \xi, \\ ds \cos b &= E\, du \cos \beta + G\, dv \cos \upsilon, \\ ds \cos c &= E\, du \cos \gamma + G\, dv \cos \zeta. \end{aligned}$$

Je remarque, avec M. Bonnet (*), que par définition ces trois dernières quantités sont des différentielles exactes; exprimant ces conditions, en tenant compte des équations (1), nous obtiendrons les relations contenues dans le tableau suivant :

$$(C)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{dE}{dv} = -\, GM, \quad ES + GR = 0, \\ &\frac{dG}{du} = EN, \quad \tang i = \frac{G\, dv}{E\, du}. \end{aligned} \right.$$

(*) *Mémoire sur la théorie des surfaces*, etc.; *Journal de l'École Polytechnique*, XLII[e] cahier, p. 35.

J'ai introduit dans ce tableau la valeur de $\tang i$, en fonction de u et de v.

On a ainsi, en A, B, C, toutes les formules fondamentales relatives au cas où les courbes (u) et (v) sont orthogonales.

Il resterait à prouver que, si les fonctions M, N, P, Q, R, S, E, G satisfont aux équations aux différences partielles contenues dans les tableaux (B) et (C), ces fonctions déterminent effectivement une surface; pour cette démonstration, je renverrai au Mémoire de M. Bonnet, déjà cité.

IV.

Considérons maintenant le cas général; soit 2ω l'angle sous lequel, en un point quelconque de la surface, se coupent les courbes (u) et (v) qui se croisent en ce point.

Nous choisirons les axes MX et MY, de telle sorte qu'ils coïncident avec les bissectrices de cet angle.

En désignant par ds un élément linéaire quelcônque de la surface, posons

$$ds^2 = E^2\, du^2 + 2EG \cos 2\omega . du\, dv + G^2\, dv^2,$$

d'où

$$ds \cos i = (E\, du + G\, dv) \cos\omega, \quad ds \sin i = (E\, du - G\, dv) \sin\omega,$$

et

$$ds \cos a = (E\, du + G\, dv) \cos\omega \cos\alpha + (E\, du - G\, dv) \sin\omega \cos\xi;$$

je ne transcris pas les valeurs de $ds \cos b$ et $ds \cos c$.

Si nous exprimons que ces trois dernières quantités sont des différentielles exactes, nous obtiendrons les relations contenues dans le tableau suivant, où j'ai aussi transcrit la valeur de $\tang i$,

$$
(\mathrm{C}')\left\{
\begin{aligned}
&\left(\frac{d\mathrm{E}}{dv}-\frac{d\mathrm{G}}{du}\right)\frac{1}{\tang\omega}=\mathrm{E}\left(\mathrm{N}+\frac{d\omega}{dv}\right)+\mathrm{G}\left(\mathrm{M}-\frac{d\omega}{du}\right)\\
&\left(\frac{d\mathrm{E}}{dv}+\frac{d\mathrm{G}}{du}\right)\tang\omega=-\mathrm{E}\left(\mathrm{N}+\frac{d\omega}{dv}\right)+\mathrm{G}\left(\mathrm{M}-\frac{d\omega}{du}\right),\\
&\qquad(\mathrm{GR}+\mathrm{EQ})\sin\omega=(\mathrm{ES}-\mathrm{GP})\cos\omega,\\
&\qquad\tang i=\frac{\mathrm{E}\,du-\mathrm{G}\,dv}{\mathrm{E}\,du+\mathrm{G}\,dv}\tang\omega.
\end{aligned}
\right.
$$

Les tableaux (A), (B), (C′) renferment toutes les formules fondamentales relatives au cas le plus général.

En terminant, je ferai remarquer que les considérations précédentes s'appliquent, sans modification, au cas de l'espace, lorsqu'on en détermine les points par les intersections successives de trois séries quelconques de surfaces.

Je reviendrai sur ce sujet.