HERMITE

Sur l'équation $x^3 + y^3 = z^3 + u^3$

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 11 (1872), p. 5-8
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__5_0>

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

SUR L'ÉQUATION $x^3+y^3=z^3+u^3$;

PAR M. HERMITE.

On doit à Euler les formules suivantes, qui vérifient identiquement cette équation :

$$\begin{aligned}
x &= +(f^2+3g^2)^2-(ff'+3gg'+3fg'-3f'g)(f'^2+3g'^2),\\
y &= -(f^2+3g^2)^2+(ff'+3gg'-3fg'+3f'g)(f'^2+3g'^2),\\
z &= -(f'^2+3g'^2)^2+(ff'+3gg'-3fg'+3f'g)(f^2+3g^2),\\
u &= +(f'^2+3g'^2)^2+(ff'+3gg'+3fg'-3f'g)(f^2+3g^2),
\end{aligned}$$

et M. Binet, dans une *Note sur une question relative à la théorie des nombres* (*Comptes rendus*, t. XII, p. 248), a observé qu'on pouvait, sans diminuer leur généralité, les réduire aux expressions plus simples :

$$\begin{aligned}
x &= +(a^2+3b^2)^2-a+3b,\\
y &= -(a^2+3b^2)^2+a+3b,\\
z &= +(a^2+3b^2)(a+3b)-1,\\
u &= -(a^2+3b^2)(a-3b)+1,
\end{aligned}$$

où n'entrent que deux indéterminées a et b. Je me propose de tirer ces résultats comme une conséquence de la propriété générale des surfaces du troisième ordre, consistant en ce que leurs points peuvent se déterminer individuellement. Soit donc $u = 1$; j'observe qu'en désignant par α une racine cubique imaginaire de l'unité, les droites

$$x = \alpha, \qquad x = \alpha^2,$$
$$y = \alpha^2 z, \quad y = \alpha z$$

sont entièrement situées sur la surface

$$x^3 + y^3 = z^3 + 1.$$

Cela posé, une autre droite, représentée par les équations

$$x = az + b,$$
$$y = pz + q,$$

rencontrera chacune de ces génératrices, si l'on a les conditions

$$\frac{\alpha - b}{a} = \frac{q}{\alpha^2 - p},$$
$$\frac{\alpha^2 - b}{a} = \frac{q}{\alpha - p};$$

d'où l'on tire

$$p = b, \quad q = \frac{b^2 + b + 1}{a},$$

et les coordonnées z_1, z_2 des points de rencontre seront respectivement les quantités

$$z_1 = \frac{\alpha - b}{a},$$
$$z_2 = \frac{\alpha^2 - b}{a}.$$

Or l'équation

$$(az + b)^3 + (pz + q)^3 = z^3 + 1$$

devra admettre pour solutions

$$z = z_1, \quad z = z_2;$$

la troisième racine sera donc une fonction rationnelle des coefficients, qui s'obtient aisément comme il suit.

Développons l'équation en nous bornant aux termes en z^3 et z^2; nous en conclurons, pour la somme des racines, l'expression

$$z + z_1 + z_2 = 3\,\frac{a^2 b + p^2 q}{1 - a^3 - p^3}.$$

Mais on a

$$z_1 + z_2 = \frac{\alpha + \alpha^2 - 2b}{a} = -\,\frac{1 + 2b}{a};$$

donc

$$z = \frac{1 + 2b}{a} + 3\,\frac{a^2 b + p^2 q}{1 - a^3 - p^3}.$$

Il vient ensuite, si l'on remplace p et q par leurs valeurs en a et b,

$$z = \frac{(1 + b + b^2)^2 - a^3(1 - b)}{a(1 - a^3 - b^3)},$$

et de là résultent, pour x et y, les expressions

$$x = \frac{(1 + b + b^2)(1 + 2b) - a^3}{1 - a^3 - b^3},$$

$$y = \frac{(1 + b + b^2)^2 - a^3(1 + 2b)}{a(1 - a^3 - b^3)}.$$

Elles se simplifient, si l'on écrit, au lieu de a, $\frac{1}{a}$, et au lieu de b, $\frac{b}{a}$, en prenant ces nouvelles formes, savoir :

$$x = \frac{(a^2 + ab + b^2)(a + 2b) - 1}{a^3 - b^3 - 1},$$

$$y = \frac{(a^2 + ab + b^2)^2 - a - 2b}{a^3 - b^3 - 1},$$

$$z = \frac{(a^2 + ab + b^2)^2 - a + b}{a^3 - b^3 - 1};$$

et, en revenant à l'équation homogène

$$x^3 + y^3 = z^3 + u^3,$$

nous obtenons ainsi pour solution :

$$x = (a^2 + ab + b^2)(a + 2b) - 1,$$
$$y = (a^2 + ab + b^2)^2 - a - 2b,$$
$$z = (a^2 + ab + b^2)^2 - a + b,$$
$$u = a^3 - b^3 - 1 = (a^2 + ab + b^2)(a - b) - 1.$$

Or il suffit maintenant de changer b en $2b$ et a en $a-b$ pour que ces formules deviennent

$$x = (a^2 + 3b^2)(a + 3b) - 1,$$
$$y = (a^2 + 3b^2)^2 - a - 3b,$$
$$z = (a^2 + 3b^2)^2 - a + 3b,$$
$$u = (a^2 + 3b^2)(a - 3b) - 1.$$

Ce sont précisément celles d'Euler, sauf que x, y, z, u sont remplacés par z, $-y$, x, et $-u$.