Nouvelles annales de mathématiques

Painvin

Étude d'un complexe du second ordre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 11 (1872), p. 49-60

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__49_0>

ÉTUDE D'UN COMPLEXE DU SECOND ORDRE;

PAR M. PAINVIN.

1. Proposons-nous la question suivante :

On donne un ellipsoïde; étudier la position des droites par lesquelles on peut mener à cet ellipsoïde des plans tangents rectangulaires.

Si (D) est une des droites par lesquelles on peut mener deux plans tangents rectangulaires, un troisième plan tangent, perpendiculaire à cette droite, la rencontrera en un point situé sur la sphère (S), lieu des sommets des trièdres trirectangles circonscrits à l'ellipsoïde donné; de sorte que, si S est le point de rencontre et que D soit le pied de la perpendiculaire abaissée du centre O de l'ellipsoïde sur la droite (D), on aura

$$\overline{OS}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{DS}^2.$$

Mais la distance $\overline{DS}$ est visiblement égale à la distance du centre O au plan tangent perpendiculaire à la droite; par conséquent, si α, β, γ sont les angles de la droite (D) avec les axes Ox, Oy, Oz de l'ellipsoïde, et si

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

est l'équation de l'ellipsoïde donné, on a

$$\overline{OS}^2 = a^2+b^2+c^2,\quad \overline{DS}^2 = a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma;$$

par suite, en désignant par δ la distance du centre à la droite (D), on a la relation caractéristique

$$(1^\circ)\qquad \delta^2 = a^2+b^2+c^2-(a^2\cos^2\alpha+b^2\cos^2\beta+c^2\cos^2\gamma).$$

Il résulte de là que δ^2 doit être inférieur à $a^2 + b^2 + c^2$; donc :

Théorème I. — *Les droites réelles satisfaisant à la question doivent toutes pénétrer dans l'intérieur de la sphère* (S), *lieu des sommets des trièdres trirectangles circonscrits à l'ellipsoïde donné.*

2. Représentons maintenant la droite (D) par des équations de la forme

$$(2^\circ) \qquad \begin{cases} x = mz + p, \\ y = nz + q, \\ nx - my = r, \end{cases} \qquad \text{où} \quad r = np - mq;$$

on a

$$\cos\alpha = m\cos\gamma, \qquad \cos\beta = n\cos\gamma,$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2 + 1}}, \qquad \delta^2 = \frac{p^2 + q^2 + r^2}{m^2 + n^2 + 1}.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'égalité (1°), préalablement mise sous la forme

$$\delta^2 = (b^2 + c^2)\cos^2\alpha + (c^2 + a^2)\cos^2\beta + (a^2 + b^2)\cos^2\gamma,$$

il vient

$$(3^\circ) \quad p^2 + q^2 + r^2 = (b^2 + c^2)m^2 + (c^2 + a^2)n^2 + (a^2 + b^2).$$

L'assemblage des droites (D) constitue un *complexe* défini par l'équation (3); ce complexe est du second ordre, mais il n'est pas le plus général de son degré. Je me propose ici d'en étudier les propriétés.

Une grande partie des propositions que je vais démontrer peut se déduire assez simplement de certaines considérations géométriques; mais j'ai accordé la préférence à la méthode analytique qui se présente ici avec des formules simples, des rapprochements intéressants, et permet d'étendre considérablement ce sujet de recherches.

La théorie des complexes généraux du second ordre, abordée pour la première fois par Plücker (*Neue Geo-*

metrie), a été complétée par M. Klein (*Mathematische Annalen*, t. II, 1870); certains complexes particuliers ont été l'objet des recherches de M. Battaglini (*Giornale di Matematiche*), et de M. Reye (*Die Geometrie der Lage*). *Voir*, en outre, le *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. II, p. 72.

L'étude actuelle a pour objet un complexe particulier du second ordre; je dirai d'abord que la méthode que j'ai adoptée est complétement différente de celles qui ont été suivies par les géomètres que je viens de citer; mais ce qu'il importe surtout de remarquer, c'est que ce complexe particulier, qui a son point de départ dans une définition géométrique bien précise, présente les rapports les plus intimes, soit avec les surfaces homofocales, soit avec la surface des ondes, et apporte, aux propriétés déjà si nombreuses de ces surfaces, un contingent assez considérable de propriétés nouvelles. Parmi les propositions que j'énonce, plusieurs devaient naturellement se présenter comme cas particulier des propositions générales déjà connues sur les complexes; mais je les ai toujours démontrées directement, afin que cette étude puisse se suffire à elle-même. Je ferai enfin observer que, dans cette recherche, j'ai toujours eu en vue la situation des droites *réelles* du complexe; c'est là ce qui spécialise et caractérise cette nouvelle étude.

3. Si x_0, y_0, z_0, et x_1, y_1, z_1 sont les coordonnées de deux points de la droite (D), on a

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} p &= \frac{x_0 z_1 - z_0 x_1}{z_1 - z_0}, \\ q &= \frac{y_0 z_1 - z_0 y_1}{z_1 - z_0}, \\ r &= \frac{x_0 y_1 - y_0 x_1}{z_1 - z_0}, \end{aligned}\right. \qquad \begin{aligned} m &= \frac{x_1 - x_0}{z_1 - z_0}, \\ n &= \frac{y_1 - y_0}{z_1 - z_0}; \end{aligned}$$

si u_0, v_0, w_0 et u_1, v_1, w_1 sont les coordonnées de deux plans passant par cette même droite (D), on a aussi

$$(1\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} p &= \frac{v_0 - v_1}{v_0 u_1 - u_0 v_1}, \\ q &= \frac{u_0 - u_1}{v_0 u_1 - u_0 v_1}, \\ r &= \frac{w_0 - w_1}{v_0 u_1 - u_0 v_1}, \end{aligned}\right. \qquad \begin{aligned} m &= \frac{v_0 w_1 - w_0 v_1}{v_0 u_1 - u_0 v_1}, \\ n &= \frac{w_0 u_1 - u_0 w_1}{v_0 u_1 - u_0 v_1}. \end{aligned}$$

Eu égard à ces valeurs, l'équation (3°) prend l'une ou l'autre des formes suivantes :

$$(2)\left\{\begin{aligned} &(y_0 z_1 - z_0 y_1)^2 + (z_0 x_1 - x_0 z_1)^2 + (x_0 y_1 - y_0 x_1)^2 \\ &= (b^2+c^2)(x_1-x_0)^2 + (c^2+a^2)(y_1-y_0)^2 + (a^2+b^2)(z_1-z_0)^2; \end{aligned}\right.$$

$$(3)\left\{\begin{aligned} &(b^2+c^2)(v_0 w_1 - w_0 v_1)^2 + (c^2+a^2)(w_0 u_1 - u_0 w_1)^2 \\ &+ (a^2+b^2)(u_0 v_1 - v_0 u_1)^2 = (u_1-u_0)^2 + (v_1-v_0)^2 + (w_1-w_0)^2. \end{aligned}\right.$$

4. Si, dans l'équation (2), on regarde x_1, y_1, z_1 comme des coordonnées variables et qu'on supprime les indices, on a l'équation suivante :

$$(4)\ [\text{cône C}]\left\{\begin{aligned} &(z_0 y - y_0 z)^2 + (x_0 z - z_0 x)^2 + (y_0 x - x_0 y)^2 \\ &= (b^2+c^2)(x-x_0)^2 + (c^2+a^2)(y-y_0)^2 \\ &\qquad + (a^2+b^2)(z-z_0)^2, \end{aligned}\right.$$

laquelle représente un cône du second ordre, lieu des droites du complexe passant par le point fixe P (x_0, y_0, z_0) ; nous dirons que c'est un *cône du complexe*, et nous le désignerons par (C) ; il résulte du théorème I que les génératrices de ce cône pénètrent toutes dans la sphère (S).

Remarque. — Si du point P on circonscrit un cône à l'ellipsoïde donné, le cône (C) du complexe sera évidemment le lieu des droites par lesquelles on peut mener des plans tangents rectangulaires au cône circonscrit; et si

$$MX^2 + NY^2 + PZ^2 = 0$$

est l'équation du premier cône rapporté à ses plans principaux, on sait que l'équation du second est

$$M(N + P)X^2 + N(P + M)Y^2 + P(M + N)Z^2 = 0.$$

5. Avant d'aller plus loin, nous indiquerons quelques notations et plusieurs formules dont nous ferons un fréquent usage.

Posons d'abord

$$(5)\quad \begin{cases} 1^\circ \begin{cases} A = b^2 + c^2, \\ B = c^2 + a^2, \\ C = a^2 + b^2; \end{cases} \\ 2^\circ \begin{cases} a_1^2 = b^2 - c^2, \\ b_1^2 = c^2 - a^2, \\ c_1^2 = a^2 - b^2; \end{cases} \\ 3^\circ \begin{cases} e = a^2 + b^2 + c^2, \\ g = a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2, \\ h = a^2 b^2 c^2; \end{cases} \end{cases}$$

puis

$$(6)\quad \begin{cases} S = x^2 + y^2 + z^2 - e, & \left\{ \text{sphère, lieu des sommets des trièdres trirectangles;} \right. \\ G = Ax^2 + By^2 + Cz^2 - g, & \text{ellipsoïde auxiliaire;} \\ H = b^2c^2x^2 + c^2a^2y^2 + a^2b^2z^2 - h, & \text{ellipsoïde donné.} \end{cases}$$

L'équation $S = 0$ est celle de la sphère, lieu des sommets des trièdres trirectangles circonscrits à l'ellipsoïde donné; la sphère (S) enveloppe complétement l'ellipsoïde $G = 0$, qui est un ellipsoïde auxiliaire, enveloppant lui-même l'ellipsoïde donné $H = 0$.

L'équation générale des surfaces homofocales de l'ellipsoïde donné est

$$(7)\qquad \frac{x^2}{a^2+\rho}+\frac{y^2}{b^2+\rho}+\frac{z^2}{c^2+\rho}-1=0,$$

et, si ρ_1, ρ_2, ρ_3 sont les *paramètres* des trois surfaces homofocales passant par le point $P(x_0, y_0, z_0)$, on aura

$$(8)\qquad \frac{x_0^2}{a^2+\rho}+\frac{y_0^2}{b^2+\rho}+\frac{z_0^2}{c^2+\rho}-1=0,$$

et ρ_1, ρ_2, ρ_3 seront les racines de l'équation

$$(9)\qquad \rho^3-S_0\rho^2-G_0\rho-H_0=0;$$

ce qui donne lieu à l'identité

$$(10)\qquad \rho^3-S_0\rho^2-G_0\rho-H_0=(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)(\rho-\rho_3),$$

puis aux relations

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} S_0 &= \rho_1+\rho_2+\rho_3,\\ G_0 &= -(\rho_1\rho_2+\rho_2\rho_3+\rho_3\rho_1),\\ H_0 &= \rho_1\rho_2\rho_3. \end{aligned}\right.$$

On a encore

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} x_0^2 &= -\frac{(a^2+\rho_1)(a^2+\rho_2)(a^2+\rho_3)}{b_1^2c_1^2},\\ y_0^2 &= -\frac{(b^2+\rho_1)(b^2+\rho_2)(b^2+\rho_3)}{c_1^2a_1^2},\\ z_0^2 &= -\frac{(c^2+\rho_1)(c^2+\rho_2)(c^2+\rho_3)}{a_1^2b_1^2}. \end{aligned}\right.$$

Maintenant nous admettrons constamment les inégalités

$$(13)\qquad a>b>c,$$

d'où

$$(13\ bis)\qquad a_1^2 > 0,\quad b_1^2 < 0,\quad c_1^2 > 0.$$

L'équation (8) nous montre que ses racines sont comprises entre $-a^2$, $-b^2$, $-c^2$ et $+\infty$; de sorte que nous pourrons toujours supposer

$$(14)\quad \begin{cases} -a^2 < \rho_3 < -b^2, & \text{hyperb. à 2 nappes;} \\ -b^2 < \rho_2 < -c^2, & \text{hyperb. à 1 nappe;} \\ -c^2 < \rho_1 < +\infty, & \text{ellipsoïde réel.} \end{cases}$$

6. Ceci admis, l'équation (4) du cône (C) pourra s'écrire

$$(15)\quad \begin{bmatrix}\text{cône (C)}\\ \text{du}\\ \text{com-}\\ \text{plexe.}\end{bmatrix}\quad \begin{aligned} &x^2(S_0 + a^2 - x_0^2) + y^2(S_0 + b^2 - y_0^2) \\ &\quad + z^2(S_0 + c^2 - z_0^2) - 2y_0 z_0 yz \\ &\quad - 2z_0 x_0 zx - 2x_0 y_0 xy \\ &\quad + 2Ax_0 x + 2By_0 y + 2Cz_0 z - (G_0 + g) = 0. \end{aligned}$$

Si l'on forme, relativement à cette surface, l'équation en s, savoir :

$$\begin{aligned} s^3 - (A + A' + A'')s^2 + (A'A'' - B^2 + A''A - B'^2 + AA' - B''^2)s \\ + AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B'' = 0, \end{aligned}$$

on trouve ici

$$(16)\quad s^3 - 2S_0 s^2 + (S_0^2 - G_0)s + (H_0 + S_0 G_0) = 0.$$

Si l'on a égard aux valeurs (11) et qu'on pose

$$(17)\quad \begin{cases} \sigma_1 = \rho_2 + \rho_3, \\ \sigma_2 = \rho_3 + \rho_1, \\ \sigma_3 = \rho_1 + \rho_2, \end{cases}$$

l'équation (16) pourra s'écrire

$$(16\ bis)\qquad (s - \sigma_1)(s - \sigma_2)(s - \sigma_3) = 0,$$

et l'on a les relations

$$(18)\quad \begin{cases} 2S_0 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ S_0^2 - G_0 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1, \\ H_0 + S_0G_0 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \end{cases}$$

7. Si du point $P(x_0, y_0, z_0)$ on mène le cône circonscrit à l'ellipsoïde donné, le cône (C) aura les mêmes plans principaux que le cône circonscrit (n° 4, Remarque); mais on sait que les plans principaux de ce dernier cône sont les plans tangents aux trois surfaces homofocales qui passent par son sommet; donc :

Théorème II. — *Les droites du complexe passant par un même point de l'espace forment un cône* (C) *du second ordre; les plans principaux du cône* (C) *du complexe sont les plans tangents, en son sommet, aux trois surfaces homofocales de l'ellipsoïde donné qui passent par ce sommet, ou, ce qui revient au même, les axes du cône* (C) *sont les normales aux trois surfaces homofocales qui passent par son sommet.*

Cette proposition nous permet d'obtenir facilement l'équation du cône (C) rapporté à ses plans principaux.

En effet, si α_1, β_1, γ_1; α_2, β_2, γ_2; α_3, β_3, γ_3 sont les cosinus des angles des directions de cordes principales correspondant aux racines σ_1, σ_2, σ_3, et si l'on pose

$$x' = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z,\quad y' = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z,\quad z' = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z,$$

l'équation de ce cône sera, comme on sait,

$$\sigma_1 x'^2 + \sigma_2 y'^2 + \sigma_3 z'^2 = 0.$$

Mais $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$ sont les plans tangents aux trois surfaces homofocales ρ_1, ρ_2, ρ_3 passant par le point (x_0, y_0, z_0), et la racine σ_1 correspond au plan tangent à la surface dont le paramètre est ρ_1, comme il résulte, soit de la Remarque du n° 4, soit de considérations de symétrie; et ainsi des autres. L'équation du cône (C) est donc de la forme

$$\sigma_1\lambda_1^2\left[\frac{x_0(x-x_0)}{a^2+\rho_1}+\frac{y_0(y-y_0)}{b^2+\rho_1}+\frac{z_0(z-z_0)}{c^2+\rho_1}\right]^2$$
$$+\sigma_2\lambda_2^2\left[\frac{x_0(x-x_0)}{a^2+\rho_2}+\frac{y_0(y-y_0)}{b^2+\rho_2}+\frac{z_0(z-z_0)}{c^2+\rho_2}\right]^2$$
$$+\sigma_3\lambda_3^2\left[\frac{x_0(x-x_0)}{a^2+\rho_3}+\frac{y_0(y-y_0)}{b^2+\rho_3}+\frac{z_0(z-z_0)}{c^2+\rho_3}\right]^2=0,$$

les constantes λ_1, λ_2, λ_3 étant telles qu'on ait

$$\lambda_1^2\left[\frac{x_0^2}{(a^2+\rho_1)^2}+\frac{y_0^2}{(b^2+\rho_1)^2}+\frac{z_0^2}{(c^2+\rho_1)^2}\right]=1,\quad \ldots.$$

Si l'on a égard aux valeurs (12), on trouve facilement que

$$\lambda_1^2=\frac{(a^2+\rho_1)(b^2+\rho_1)(c^2+\rho_1)}{(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_3)},\quad \lambda_2^2=\ldots,\quad \lambda_3^2=\ldots.$$

L'équation du cône (C) du complexe rapporté à ses plans principaux est donc

$$(19)\qquad [C]\left\{\begin{aligned}&+\sigma_1(\rho_2-\rho_3)(a^2+\rho_1)(b^2+\rho_1)(c^2+\rho_1)\\&\quad\times\left[\frac{x_0x}{a^2+\rho_1}+\frac{y_0y}{b^2+\rho_1}+\frac{z_0z}{c^2+\rho_1}-1\right]^2\\&+\sigma_2(\rho_3-\rho_1)(a^2+\rho_2)(b^2+\rho_2)(c^2+\rho_2)\\&\quad\times\left[\frac{x_0x}{a^2+\rho_2}+\frac{y_0y}{b^2+\rho_2}+\frac{z_0z}{c^2+\rho_2}-1\right]^2\\&+\sigma_3(\rho_1-\rho_2)(a^2+\rho_3)(b^2+\rho_3)(c^2+\rho_3)\\&\quad\times\left[\frac{x_0x}{a^2+\rho_3}+\frac{y_0y}{b^2+\rho_3}+\frac{z_0z}{c^2+\rho_3}-1\right]^2=0.\end{aligned}\right.$$

8. Cherchons maintenant les points (x_0, y_0, z_0) pour lesquels le *cône du complexe* se réduit à un système de deux plans.

Pour ces points, l'équation (16) doit avoir une racine nulle ; on a donc

$$(20) \qquad S_0 G_0 + H_0 = 0, \quad \text{ou} \quad \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = 0.$$

On obtient ainsi une surface que nous désignerons par Δ, et dont l'équation est

$$(21) \qquad \Delta = SG + H = 0,$$

ou

$$(21\ bis) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta = (x^2 + y^2 + z^2 - e)(Ax^2 + By^2 + Cz^2 - g) \\ \qquad + b^2c^2x^2 + c^2a^2y^2 + a^2b^2z^2 - a^2b^2c^2 = 0, \end{array} \right.$$

ou encore

$$(21\ ter) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta = (x^2 + y^2 + z^2)(Ax^2 + By^2 + Cz^2) + ABC \\ \qquad - [A(B+C)x^2 + B(C+A)y^2 + C(A+B)z^2] = 0. \end{array} \right.$$

On voit que cette surface est du quatrième ordre, et la dernière forme nous montre que c'est une *surface des ondes* ayant pour ellipsoïde directeur

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} - 1 = 0.$$

9. Comme, dans le cas actuel, une des quantités σ_1, σ_2, σ_3 est nulle, nous voyons, par l'équation (19), que la droite d'intersection des deux plans est une des normales aux surfaces homofocales qui passent par le point (x_0, y_0, z_0) considéré ; ce qui résulte également de la Remarque du n° 4.

Nous démontrerons d'ailleurs, un peu plus loin, que l'arête du système de deux plans correspondant à un point (x_0, y_0, z_0) de la surface Δ touche la surface en ce point. Ainsi :

Théorème III. — *Le lieu des points pour lesquels le cône* (C) *du complexe se réduit à un système de deux* *plans distincts est une surface* (Δ) *du quatrième ordre, laquelle est une* SURFACE DES ONDES *par rapport à l'ellipsoïde directeur*

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} - 1 = 0.$$

Ce dernier ellipsoïde est la surface polaire réciproque de l'ellipsoïde (G) *par rapport à une sphère dont le rayon est* $\sqrt[4]{g}$.

L'arête du système des deux plans est normale à l'une des surfaces homofocales qui passent par le point considéré (x_0, y_0, z_0), *et touche en ce point la surface* Δ.

Nota. — 1° Il est entendu que les surfaces homofocales que nous considérerons dans le Mémoire actuel seront toujours des surfaces homofocales de l'ellipsoïde donné.

2° Pour abréger le langage, nous dirons que l'ensemble des deux plans auxquels peut se réduire le cône (C) est un *système de deux plans du complexe,* ou, plus simplement encore, un *système du complexe;* la droite d'intersection des deux plans sera dite l'*arête du système.*

10. Rappelons que les surfaces (S), (G), (H) s'enveloppent successivement (n° 5), et que les quantités S_0, G_0, H_0 sont positives ou négatives, suivant que le point (x_0, y_0, z_0) est extérieur ou intérieur à la surface correspondante.

Or, pour un point situé sur la surface Δ, c'est-à-dire tel que

$$S_0 G_0 + H_0 = 0,$$

on doit avoir

$$S_0 < 0, \quad G_0 > 0. \tag{22}$$

Car si $S_0 > 0$, on a alors $G_0 > 0$, $H_0 > 0$, et l'équation ci-dessus n'admet pas de solutions réelles;

Si l'on a $S_0 < 0$ et $G_0 > 0$, alors $H_0 > 0$; l'équation peut être vérifiée par des valeurs réelles de x_0, y_0, z_0;

Si l'on a à la fois $S_0 < 0$, $G_0 < 0$, $H_0 > 0$, il n'y a pas de solutions réelles;

Enfin, si l'on a $S_0 < 0$, $G_0 < 0$, $H_0 < 0$, il n'y aura pas encore de solutions réelles; car une des quantités σ_1, σ_2, σ_3 doit être nulle; or la quantité $\sigma_1 = \rho_2 + \rho_3$ ne peut être nulle, puisqu'elle est la somme de deux nombres négatifs (14), [n° 5]; d'un autre côté, lorsque σ_2 ou σ_3 s'annulent, la quantité G_0 se réduit à $+\rho_1^2$, (17) et (11); mais, ρ_1 étant réel, G_0 serait positif; par suite, l'hypothèse faite est inadmissible pour des valeurs réelles de x_0, y_0, z_0, vérifiant l'équation en question.

La surface Δ est donc tout entière renfermée entre la sphère (S) et l'ellipsoïde (G).

(*La suite prochainement.*)