PAINVIN

Étude d'un complexe du second ordre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 11 (1872), p. 481-500
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__481_0>

ÉTUDE D'UN COMPLEXE DU SECOND ORDRE

(suite, voir même tome, p. 289);

PAR M. PAINVIN.

§ III.

Résumé relatif à la situation des droites réelles du complexe.

25. Les propriétés caractéristiques que nous avons signalées dans les paragraphes précédents permettent de se faire une idée fort nette de la situation des droites réelles du complexe. Pour cela, nous imaginerons un plan Π dans une situation déterminée, puis nous supposerons que le sommet P du cône complexe se déplace dans ce plan.

Il faut d'abord observer que la remarque du n° 13 nous conduit à cette proposition :

THÉORÈME X. — *La conique* (Γ), *correspondant à un plan* Π, *touche en quatre points* (*réels ou imaginaires*) *la section de la surface* Δ *par ce plan. Un cône* (C), *ayant son sommet en un point quelconque, a quatre de ses génératrices* (*réelles ou imaginaires*) *touchant la surface* Δ.

En effet, il y a dans un plan Π quatre droites d intersection des deux plans d'un système du complexe; or une droite d est la réunion de deux tangentes à la conique (Γ), et elle vient toucher la conique au point où elle touche la surface Δ; donc.... Maintenant, par un point P, passent quatre de ces droites d, qui sont des tangentes à Δ (théorème IV, n° 11), et sont évidemment des droites du complexe; donc....

26. Nous avons à examiner les cas suivants :

1° *Le plan* Π *est extérieur à la surface* Δ.

Lorsque le sommet du cône se déplace dans le plan Π, le cône du complexe enveloppe le cône circonscrit à l'ellipsoïde donné, ayant son sommet en P; les génératrices du cône du complexe devant pénétrer entre les deux nappes de la surface Δ, il n'y aura aucune génératrice réelle de ces cônes dans le plan Π, c'est-à-dire qu'il n'y aura dans ce plan aucune droite réelle du complexe; la conique (Γ) correspondante est donc une *ellipse imaginaire.*

2° *Le plan* Π *touche la nappe supérieure de* Δ.

Soient C le point de contact et I le pied de la perpendiculaire abaissée du centre O de l'ellipsoïde donné sur le plan Π; la conique (Γ) se réduit à *deux points imaginaires,* qui sont les intersections imaginaires de la droite CI avec la nappe inférieure de Δ; I est le milieu du segment déterminé par ces deux points. Lorsque le sommet P du cône du complexe se déplace dans le plan Π, aucune génératrice réelle du cône ne devra se trouver dans ce plan, puisqu'elles doivent passer entre les deux nappes de Δ; il n'y aura d'exception que pour le cas où le sommet P vient en C. Le cône du complexe se réduit alors à deux plans réels dont l'arête, située dans le plan tangent Π et devant toucher la conique (Γ), se confond avec la droite CI. Toutes les droites du complexe, qui passent par le point C, sont situées dans l'un ou l'autre des deux plans du système, lesquels plans sont tangents à la nappe inférieure de Δ.

3° *Le plan* Π *coupe la nappe supérieure de* Δ *sans rencontrer la nappe inférieure.*

Soit δ_1 l'intersection du plan avec la nappe supérieure de Δ; la courbe δ_1 est fermée. La conique (Γ) est réelle et est une *hyperbole* extérieure à la courbe δ_1; car, si une des branches de cette hyperbole pénétrait dans δ_1, il y aurait une portion d'arc de cette courbe des points duquel on ne pourrait pas mener de tangente à l'hyperbole; or cela est inadmissible, puisque, pour les différents points de cet arc, le cône du complexe se réduit à un système de plans réels qui seront toujours coupés suivant des droites réelles par le plan Π, et ces droites réelles devraient toucher l'hyperbole. Le centre I de cette hyperbole sera le pied de la perpendiculaire abaissée du centre de l'ellipsoïde sur le plan Π.

Lorsque le sommet P du cône du complexe se trouvera dans l'intérieur de l'hyperbole (Γ), il n'y aura pas de droites réelles dans le plan Π; quand le point se trouvera sur l'hyperbole, le cône du complexe touchera le plan Π suivant la tangente en P à l'hyperbole; lorsqu'il sera à l'extérieur de la conique, le cône sera coupé par le plan Π suivant deux génératrices réelles qui seront tangentes à la conique, et ces deux génératrices deviendront les asymptotes quand le point P viendra coïncider avec le point I.

Lorsque le sommet se trouve sur la courbe δ_1, le cône du complexe se réduit à deux plans réels dont l'arête n'est pas dans le plan Π, sauf pour les points où la courbe δ_1 vient toucher l'hyperbole (Γ).

4° *Le plan* Π *touche la nappe inférieure de* Δ.

Soient toujours δ_1 l'intersection du plan Π avec la nappe supérieure de Δ, C son point de contact avec la nappe inférieure, et I le pied de la perpendiculaire abaissée du centre O de l'ellipsoïde sur ce plan; la conique (Γ) se réduit ici à deux points réels, a et a', qui sont les intersections de la droite CI avec la nappe supérieure de Δ; I est le milieu du segment aa'.

Lorsque le sommet P a une situation quelconque dans le plan Π, le cône du complexe est coupé par le plan Π suivant deux droites réelles passant respectivement par a et a'; quand le sommet est en C, le cône se réduit à deux plans imaginaires, dont l'arête réelle, située dans le plan tangent Π, coïncide nécessairement avec la droite aa'.

Quand le point P se trouve sur la courbe δ_1, le cône du complexe se réduit à deux plans réels dont les intersections par le plan Π passent toujours par les points a et a'. Si le sommet du cône se déplace sur aa', le cône est touché par le plan Π suivant l'arête aa'; lorsqu'il se trouve en a ou a', le cône se réduit à deux plans réels dont l'arête, située dans le plan Π, touche la courbe δ_1 en a ou a'.

5° *Le plan* Π *coupe les deux nappes de la surface* Δ.

Soient δ_1 et δ_0 les intersections du plan Π avec les nappes supérieure et inférieure de Δ; comme il y a dans ce plan des droites réelles du complexe, puisque les points de δ_1 donnent lieu à des plans réels, il en résulte que la conique (Γ) est réelle; comme elle est une ellipse, cette ellipse est donc réelle. Ajoutons que cette ellipse est extérieure à la courbe δ_0 et intérieure à la courbe δ_1. En effet, si le sommet du cône est sur la courbe δ_1, on a deux plans réels dont les intersections par le plan Π doivent toucher la conique Γ; si le sommet P est dans l'intérieur de δ_0, le cône du complexe est imaginaire, propriétés qui impliquent nécessairement la position que nous avons assignée à l'ellipse Γ.

Lorsque le sommet P du cône est en dehors de δ_1, ou situé entre δ_1 et (Γ), le cône du complexe est réel et coupé suivant deux droites réelles par le plan Π; si ce sommet se trouve entre (Γ) et δ_0, le cône est réel, mais il n'a plus de droites réelles situées dans le plan Π; enfin, quand le sommet est dans l'intérieur de δ_0, le cône est imaginaire.

Lorsque le sommet est sur δ_0, le cône se réduit à deux plans imaginaires dont l'arête traverse le plan Π, excepté pour les points, tels que d_0, où la conique (Γ) touche la courbe δ_0; pour ces points, le cône du complexe se réduit à deux plans imaginaires, dont l'arête, située dans le plan Π, touche en d_0 la courbe δ_0, et rencontre la courbe δ_1 en deux points a_1 et a'_1, qui seront les sommets de la conique, réduite à deux points, correspondant au plan tangent à Δ en d_0.

Quand le sommet se déplace sur la conique (Γ), le cône du complexe est tangent au plan Π suivant la tangente à la conique au point où se trouve le sommet.

Enfin, lorsque le sommet du cône est sur δ_1, le cône se réduit à deux plans réels, dont les intersections par le plan Π touchent la conique; si le sommet vient à coïncider avec un des points, tels que a_1, les deux plans sont toujours distincts, leur arête n'est pas située dans le plan Π, et ils sont coupés par ce plan suivant deux droites, dont l'une est $a_1 a'_1$. Quand le sommet se trouve en un des points où la conique (Γ) touche la courbe δ_1, les deux plans du système ont leur arête dans le plan Π; cette arête est la tangente commune en ce point à la conique et à la courbe δ_1.

§ IV.

27. Nous allons revenir maintenant sur certaines propriétés plus particulières que nous avons laissées de côté dans cette première étude, et sur la démonstration analytique de plusieurs propositions énoncées dans les paragraphes précédents. Ces démonstrations analytiques ont

l'avantage de mettre en évidence les relations qui lient les éléments correspondants, et peuvent être utiles dans d'autres recherches.

Les points a, a', auxquels se réduit la conique (Γ), *quand le plan auquel elle correspond est tangent à la surface* Δ, *se trouvent sur cette même surface* Δ (n° 24).

Le plan (u_0, v_0, w_0) étant tangent à la surface Δ, on a, n° 21,

$$(1^\circ) \qquad \mathrm{N} = 0, \quad \text{ou} \quad \mathfrak{s}_0 \mathfrak{g}_0 - e\mathfrak{s}_0 - \mathfrak{h}_0 = 0;$$

les équations (41), (42 *bis*) et (43 *bis*) du n° 19 donnent alors

$$(2^\circ) \qquad \rho^2 = \frac{\mathrm{M}}{\mathfrak{s}_0}, \quad k = \mathrm{M}, \quad \mathrm{M} = \mathfrak{s}_0 \mathfrak{g}_0 - 1.$$

On a d'ailleurs, n^{os} 19 et 21,

$$(49) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{s}_0 &= u_0^2 + v_0^2 + w_0^2, \\ \mathfrak{g}_0 &= \mathrm{BC}u_0^2 + \mathrm{CA}v_0^2 + \mathrm{AB}w_0^2, \\ \mathfrak{h}_0 + 1 &= a^2 u_0^2 + b^2 v_0^2 + c^2 w_0^2; \end{aligned} \right.$$

$$(49\ bis) \qquad \mathfrak{s}_0 \mathfrak{g}_0 - e\mathfrak{s}_0 - \mathfrak{h}_0 = 0.$$

Les équations (49), résolues par rapport à u_0, v_0, w_0, donnent, eu égard à (49 *bis*),

$$(50) \qquad \left\{ \begin{aligned} b_1^2 c_1^2 u_0^2 &= (\mathrm{A}\mathfrak{s}_0 - 1)(\mathfrak{g}_0 - \mathrm{A}), \\ c_1^2 a_1^2 v_0^2 &= (\mathrm{B}\mathfrak{s}_0 - 1)(\mathfrak{g}_0 - \mathrm{B}), \\ a_1^2 b_1^2 w_0^2 &= (\mathrm{C}\mathfrak{s}_0 - 1)(\mathfrak{g}_0 - \mathrm{C}); \end{aligned} \right.$$

les équations (50) *définissent les coordonnées* u_0, v_0, w_0 *d'un plan quelconque, tangent à la surface* Δ, *en fonction des quantités* $\mathfrak{s}_0$, $\mathfrak{g}_0$, *qu'on peut regarder comme arbitraires.*

Pour obtenir les coordonnées x, y, z des points a et a', remarquons que, si l'on abaisse du centre O de l'ellipsoïde une perpendiculaire sur le plan u_0, v_0, w_0, le pied I de cette perpendiculaire, dont les coordonnées sont $\frac{u_0}{S_0}$, $\frac{v_0}{S_0}$, $\frac{w_0}{S_0}$, sera le centre de la conique (a, a'), et la longueur Ia sera précisément égale à ρ. Par conséquent, si α, β, γ sont les angles de Ia avec les axes, on aura

$$(3^\circ)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{u_0}{S_0} + \rho\cos\alpha,\\ y &= \frac{v_0}{S_0} + \rho\cos\beta, \qquad \text{où}\quad \rho^2 = \frac{S_0 G_0 - 1}{S_0}.\\ z &= \frac{w_0}{S_0} + \rho\cos\gamma, \end{aligned}\right.$$

Mais les angles α, β, γ sont donnés par les égalités (44), n° 20; en introduisant dans ces égalités la valeur actuelle de k, $k = S_0 G_0 - 1$, elles deviennent

$$\frac{\cos\alpha(AS_0 - 1)}{u_0} = \frac{\cos\beta(BS_0 - 1)}{v_0} = \frac{\cos\gamma(CS_0 - 1)}{w_0} = \mu.$$

On devra avoir

$$\frac{1}{\mu^2} = \frac{u_0^2}{(AS_0 - 1)^2} + \frac{v_0^2}{(BS_0 - 1)^2} + \frac{w_0^2}{(CS_0 - 1)^2},$$

ce qui donne, en ayant égard aux valeurs (50),

$$(4^\circ)\qquad \mu^2\rho^2 S_0^2 = -(AS_0 - 1)(BS_0 - 1)(CS_0 - 1).$$

Par conséquent :

Les coordonnées x, y, z des points a, a', auxquels se réduit la conique (Γ) correspondant au plan tangent (u_0, v_0, w_0), seront données par les équations

$$(51)\quad (a, a')\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{u_0}{S_0} + \frac{u_0}{S_0}\,\frac{\varepsilon}{AS_0 - 1},\\ y &= \frac{v_0}{S_0} + \frac{v_0}{S_0}\,\frac{\varepsilon}{BS_0 - 1},\\ z &= \frac{w_0}{S_0} + \frac{w_0}{S_0}\,\frac{\varepsilon}{CS_0 - 1}, \end{aligned}\right.$$

où

$$\varepsilon^2 = -(A\mathfrak{S}_0 - 1)(B\mathfrak{S}_0 - 1)(C\mathfrak{S}_0 - 1).$$

Pour démontrer que ces points sont situés sur la surface Δ, n° **8**, nous allons calculer les expressions

$$\begin{aligned} S &= x^2 + y^2 + z^2 - e,\\ G &= Ax^2 + By^2 + Cz^2 - g,\\ H &= b^2c^2x^2 + c^2a^2y^2 + a^2b^2z^2 - g. \end{aligned}$$

Dans ce but, faisons d'abord les carrés de x, y, z; on a

$$(51\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{S}_0^2 x^2 &= \frac{\mathcal{G}_0 - A}{b_1^2 c_1^2}(-BC\mathfrak{S}_0^2 + 2e\mathfrak{S}_0 - 2 + 2\varepsilon),\\ \mathfrak{S}_0^2 y^2 &= \frac{\mathcal{G}_0 - B}{c_1^2 a_1^2}(-CA\mathfrak{S}_0^2 + 2e\mathfrak{S}_0 - 2 + 2\varepsilon),\\ \mathfrak{S}_0^2 z^2 &= \frac{\mathcal{G}_0 - C}{a_1^2 b_1^2}(-AB\mathfrak{S}_0^2 + 2e\mathfrak{S}_0 - 2 + 2\varepsilon). \end{aligned}\right.$$

On trouve alors immédiatement, en ayant égard aux relations (28), n° **13**,

$$\begin{aligned} S &= \mathcal{G}_0 - e,\\ G\mathfrak{S}_0^2 &= 2e\mathfrak{S}_0 - g\mathfrak{S}_0^2 - 2 + 2\varepsilon,\\ H\mathfrak{S}_0^2 &= -(2e\mathfrak{S}_0 - g\mathfrak{S}_0^2 - 2)(\mathcal{G}_0 - e) - 2\varepsilon(\mathcal{G}_0 - e); \end{aligned}$$

d'où il résulte

$$SG + H = 0,$$

ce qui démontre la proposition en question.

28. *Tout plan tangent à la surface Δ appartient à un des systèmes de plans du complexe.*

Reportons-nous à l'équation (5°) (23) du n° **11**; si nous posons

$$\begin{aligned} \theta' &= \sqrt{(a^2 + \rho_1)(b^2 + \rho_1)(c^2 + \rho_1)},\\ \theta'' &= \sqrt{(a^2 - \rho_1)(b^2 - \rho_1)(c^2 - \rho_1)},\\ 2\theta &= (\theta' + \theta'')^2, \end{aligned}$$

les coordonnées u_0, v_0, w_0 d'un plan du complexe pourront s'écrire

$$u_0 = \frac{x_0[\theta'(a^2-\rho_1)+\theta''(a^2+\rho_1)]}{(\theta'+\theta'')(a^4-\rho_1^2)}, \ldots,$$

avec

$$x_0^2 = -\frac{(a^4-\rho_1^2)(a^2+\rho_2)}{b_1^2 c_1^2}, \ldots,$$

ou, en élevant au carré et réduisant,

$$-b_1^2 c_1^2 u_0^2 \theta = (a^2+\rho_2)(h - e\rho_1^2 + 2a^2\rho_1^2 + \theta'\theta''), \ldots.$$

Mais il est facile de voir que

$$\theta = h + e\rho_1^2 + \theta'\theta'';$$

par conséquent, *les coordonnées* u_0, v_0, w_0 *des plans du complexe correspondant à un point de la nappe supérieure de* Δ, *défini par les paramètres* ρ_1 *et* ρ_2, *sont données par les équations*

$$(52)\quad \left\{\begin{aligned} -b_1^2 c_1^2 u_0^2 &= (a^2+\rho_2)\left(1 - 2A\frac{\rho_1^2}{\theta}\right),\\ -c_1^2 a_1^2 v_0^2 &= (b^2+\rho_2)\left(1 - 2B\frac{\rho_1^2}{\theta}\right),\\ -a_1^2 b_1^2 w_0^2 &= (c^2+\rho_2)\left(1 - 2C\frac{\rho_1^2}{\theta}\right),\end{aligned}\right.$$

où

$$\begin{aligned} 2\theta &= (\theta'+\theta'')^2,\\ \theta' &= \pm\sqrt{(a^2+\rho_1)(b^2+\rho_1)(c^2+\rho_1)},\\ \theta'' &= \pm\sqrt{(a^2-\rho_1)(b^2-\rho_1)(c^2-\rho_1)}.\end{aligned}$$

Si, à l'aide des valeurs (52), on calcule les expressions

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0 &= u_0^2 + v_0^2 + w_0^2,\\ \mathcal{G}_0 &= BCu_0^2 + CAv_0^2 + ABw_0^2,\\ \mathcal{H}_0 &= a^2u_0^2 + b^2v_0^2 + c^2w_0^2 - 1,\end{aligned}$$

on trouve

$$
(53)\quad \left\{
\begin{aligned}
\mathcal{S}_0 &= 2\,\frac{\rho_1^2}{\theta},\\
\mathcal{G}_0 &= e + \rho_2,\\
\mathcal{H}_0 &= \frac{2\rho_2\rho_1^2}{\theta}.
\end{aligned}
\right.
$$

De là résulte évidemment

$$
\mathcal{S}_0\mathcal{G}_0 - e\mathcal{S}_0 - \mathcal{H}_0 = 0.
$$

En rapprochant ces résultats de ceux que donnent les équations (23) (2°), n° 11, on a la proposition suivante :

Si x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées d'un point de la surface Δ, aux paramètres ρ_1 et ρ_2; si u_0, v_0, w_0 sont les coordonnées d'un des plans du système correspondant au point (x_0, y_0, z_0), on a les valeurs

$$
(54)\left\{
\begin{aligned}
&\mathrm{S}_0 = \rho_2, \qquad \mathrm{G}_0 = \rho_1^2, \qquad \mathrm{H}_0 = -\rho_2\rho_1^2;\\
&\mathcal{S}_0 = \frac{2\rho_1^2}{\theta}, \quad \mathcal{G}_0 = e + \rho_2, \quad \mathcal{H}_0 = \frac{2\rho_2\rho_1^2}{\theta};\\
&2\theta = \left[\sqrt{(a^2+\rho_1)(b^2+\rho_1)(c^2+\rho_1)} \pm \sqrt{(a^2-\rho_1)(b_2-\rho_1)(c^2-\rho_1)}\right]^2.
\end{aligned}
\right.
$$

Démontrons maintenant que tout plan tangent à Δ est un plan d'un des systèmes du complexe. Il nous suffit d'écrire que les valeurs (50) de u_0, v_0, w_0, qui déterminent un plan tangent à la surface Δ, sont les mêmes que celles que fournissent les équations (52) qui déterminent les plans des systèmes du complexe. On obtient ainsi les égalités

$$
(1^\circ)\quad \left\{
\begin{aligned}
\rho_2 &= \frac{(\mathrm{A}\mathcal{S}_0 - 1)(\mathcal{G}_0 - \mathrm{A})}{2\mathrm{A}\,\dfrac{\rho_1^2}{\theta} - 1} - a^2\\
&= \frac{(\mathrm{B}\mathcal{S}_0 - 1)(\mathcal{G}_0 - \mathrm{B})}{2\mathrm{B}\,\dfrac{\rho_1^2}{\theta} - 1} - b^2\\
&= \frac{(\mathrm{C}\mathcal{S}_0 - 1)(\mathcal{G}_0 - \mathrm{C})}{2\mathrm{C}\,\dfrac{\rho_1^2}{\theta} - 1} - c^2.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces trois équations, où S_0 et $\mathcal{G}_0$ sont des quantités supposées connues, doivent déterminer les deux inconnues ρ_1 et ρ_2.

Or, si l'on fait $\frac{\rho_1^2}{\theta} = S_0$, les rapports (1°) deviennent égaux, et l'on a

$$\rho_2 = \mathcal{G}_0 - e;$$

ce qui prouve la proposition qu'on avait en vue.

De là, ou des relations (54), nous tirons encore la remarque suivante :

Si u_0, v_0, w_0 sont les coordonnées d'un plan tangent à la nappe inférieure de Δ, par exemple, les paramètres ρ_1 et ρ_2 du point (x_0, y_0, z_0) de la nappe supérieure pour lequel ce plan donné est un des plans du système correspondant du complexe sont fournis par les équations

$$(55)\quad \begin{cases} \rho_2 = \mathcal{G}_0 - e, \\ \rho_1^4 + 2\rho_1^2\left(\dfrac{2}{S_0^2} - \dfrac{2e}{S_0} + g\right) + g^2 - \dfrac{4h}{S_0} = 0. \end{cases}$$

29. La droite d'intersection des deux plans d'un système du complexe est définie par les équations (26), n° 12 :

$$(1^\circ)\quad \begin{cases} x = x_0 + \dfrac{\lambda x_0}{a^2 + \rho_2}, \\ y = y_0 + \dfrac{\lambda y_0}{b^2 + \rho_2}, \\ z = z_0 + \dfrac{\lambda z_0}{c^2 + \rho_2}, \end{cases}$$

λ est une arbitraire; (x_0, y_0, z_0) est le point où cette droite touche la surface Δ; ρ_2 est le paramètre de la surface homofocale à laquelle est normale la droite (d).

Cherchons combien il y a de ces droites dans un plan (u_1, v_1, w_1) arbitrairement donné.

La droite (1°) devant être dans le plan (u_1, v_1, w_1), c'est-à-dire

$$u_1 x + v_1 y + w_1 z - 1 = 0,$$

on a les deux équations de condition

$$(2^\circ) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1 x_0 + v_1 y_0 + w_1 z_0 - 1 = 0, \\ \dfrac{u_1 x_0}{a^2 + \rho_2} + \dfrac{v_1 y_0}{b^2 + \rho_2} + \dfrac{w_1 z_0}{c^2 + \rho_2} = 0. \end{array} \right.$$

Or les équations (2°) sont vérifiées si l'on pose

$$(56) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1 x_0 = -\dfrac{(a^2 + \rho_2)(a^2 - \mu)}{b_1^2 c_1^2}, \\ v_1 y_0 = -\dfrac{(b^2 + \rho_2)(b^2 - \mu)}{c_1^2 a_1^2}, \\ w_1 z_0 = -\dfrac{(c^2 + \rho_2)(c^2 - \mu)}{a_1^2 b_1^2}, \end{array} \right.$$

et ce seront les valeurs générales, puisqu'elles renferment une constante arbitraire μ.

Mais les coordonnées x_0, y_0, z_0 doivent vérifier les équations (23) (3°), n° 11; en y substituant les valeurs (56) et en isolant le terme en ρ_1^2, il vient

$$(56\ bis) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_1^2 = \dfrac{(a^2 + \rho_2)(a^2 - \mu)^2}{b_1^2 c_1^2} + a^4 \\ \quad = \dfrac{(b^2 + \rho_2)(b^2 - \mu)^2}{c_1^2 a_1^2} + b^4 \\ \quad = \dfrac{(c^2 + \rho_2)(c^2 - \mu)^2}{a_1^2 b_1^2} + c^4. \end{array} \right.$$

Égalons maintenant ces rapports, et résolvons les égalités par rapport à ρ_2, on trouve

$$(56\ ter) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_2 = \dfrac{b^2 b_1^2 (b^2 - \mu)^2 w_1^2 - c^2 c_1^2 (c^2 - \mu)^2 v_1^2 + \mathrm{A} a_1^4 b_1^2 c_1^2 v_1^2 w_1^2}{c_1^2 (c^2 - \mu)^2 v_1^2 - b_1^2 (b^2 - \mu)^2 w_1^2} \\ \quad = \dfrac{c^2 c_1^2 (c^2 - \mu)^2 u_1^2 - a^2 a_1^2 (a^2 - \mu)^2 w_1^2 + \mathrm{B} a_1^2 b_1^4 c_1^2 w_1^2 u_1^2}{a_1^2 (a^2 - \mu)^2 w_1^2 - c_1^2 (c^2 - \mu)^2 u_1^2} \\ \quad = \dfrac{a^2 a_1^2 (a^2 - \mu)^2 v_1^2 - b^2 b_1^2 (b^2 - \mu)^2 u_1^2 + \mathrm{C} a_1^2 b_1^2 c_1^4 u_1^2 v_1^2}{b_1^2 (b^2 - \mu)^2 u_1^2 - a_1^2 (a^2 - \mu)^2 v_1^2} \end{array} \right.$$

Enfin, si l'on égale entre eux les derniers rapports, on arrive à l'équation *unique*

$$(56\ quater)\quad \left\{\begin{aligned} & u_1^2(b^2-\mu)^2(c^2-\mu)^2 + v_1^2(c^2-\mu)^2(a^2-\mu)^2 \\ & + w_1^2(a^2-\mu)^2(b^2-\mu)^2 - \mathrm{A}\, v_1^2 w_1^2 a_1^4 (a^2-\mu)^2 \\ & - \mathrm{B}\, w_1^2 u_1^2 b_1^4 (b^2-\mu)^2 - \mathrm{C}\, u_1^2 v_1^2 c_1^4 (c^2-\mu)^2 = 0. \end{aligned}\right.$$

L'équation (56 *quater*) est du quatrième degré en μ; à une racine μ correspond une seule valeur de ρ_2 fournie par les équations (56 *ter*), puis une seule valeur positive de ρ_1 donnée par les équations (56 *bis*), et enfin une seule valeur des coordonnées x_0, y_0, z_0 du point de contact données par les équations (56). Par conséquent :

Il y a quatre droites (d) situées dans un plan arbitrairement donné (u_1, v_1, w_1).

30. *Cherchons combien il y a de droites (d) passant par un point (x_1, y_1, z_1) arbitrairement donné.*

D'après les équations (1°) ci-dessus, on a

$$x_0 = \frac{(a^2+\rho_2)x_1}{(a^2+\rho_2+\lambda)},\quad y_0 = \frac{(b^2+\rho_2)y_1}{(b^2+\rho_2+\lambda)},\quad z_0 = \frac{(c^2+\rho_2)z_1}{(c^2+\rho_2+\lambda)};$$

ou, après avoir posé $\rho_1 + \lambda = \nu$,

$$(57)\quad x_0 = \frac{(a^2+\rho_2)x_1}{(a^2+\nu)},\quad y_0 = \frac{(b^2+\rho_2)y_1}{(b^2+\nu)},\quad z_0 = \frac{(c^2+\rho_2)z_1}{(c^2+\nu)}.$$

Substituons ces valeurs dans les équations (3°) (23), n° 11, et dirigeons le calcul comme dans le numéro précédent, nous obtenons successivement

$$(57\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} \rho_1^2 &= \frac{b_1^2 c_1^2 (a^2+\rho_2)}{(a^2+\nu)^2} + a^4 \\ &= \frac{c_1^2 a_1^2 (b^2+\rho_2)}{(b^2+\nu)^2} + b^4 = \frac{a_1^2 b_1^2 (c^2+\rho_2)}{(c^2+\nu)^2} + c^4; \end{aligned}\right.$$

$$
(57\ ter)\quad \left\{
\begin{aligned}
\rho_2 &= \frac{b^2c_1^2y_1^2(c^2+\nu)^2 - c^2b_1^2z_1^2(b^2+\nu)^2 + \mathrm{A}(b^2+\nu)^2(c^2+\nu)^2}{b_1^2z_1^2(b^2+\nu)^2 - c_1^2y_1^2(c^2+\nu)^2}\\
&= \frac{c^2a_1^2z_1^2(a^2+\nu)^2 - a^2c_1^2x_1^2(c^2+\nu)^2 + \mathrm{B}(c^2+\nu)^2(a^2+\nu)^2}{c_1^2x_1^2(c^2+\nu)^2 - a_1^2z_1^2(a^2+\nu)^2} = \ldots;
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(57\ quater)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\mathrm{A}x_1^2(b^2+\nu)^2(c^2+\nu)^2 + \mathrm{B}y_1^2(c^2+\nu)^2(a^2+\nu)^2\\
&\quad + \mathrm{C}z_1^2(a^2+\nu)^2(b^2+\nu)^2 - a_1^4y_1^2z_1^2(a^2+\nu)^2\\
&\quad - b_1^4z_1^2x_1^2(b^2+\nu)^2 - c_1^4x_1^2y_1^2(c^2+\nu)^2 = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

D'où l'on conclut comme précédemment que :

Il y a quatre droites (d) passant par un point (x_1, y_1, z_1) arbitrairement choisi.

31. Voici maintenant les diverses questions particulières que nous étudierons successivement :

1° Cas où le sommet du cône du complexe est à l'infini ; cas où le plan des coniques (Γ) passe par le centre de l'ellipsoïde ;

2° Lieu des points pour lesquels le cône du complexe est de révolution ; position des plans pour lesquels la conique (Γ) se réduit à un cercle ;

3° Points pour lesquels le cône du complexe se réduit à deux plans coïncidents ; plans pour lesquels la conique (Γ) se réduit à deux points coïncidents.

32. *Cas où le sommet du cône du complexe est à l'infini.*

Reportons-nous à l'équation (4), n° 4 ; remplaçons-y x_0, y_0, z_0 par $\frac{x_0}{t_0}$, $\frac{y_0}{t_0}$, $\frac{z_0}{t_0}$; puis, après avoir chassé le dénominateur, faisons

$$\frac{x_0}{\cos\alpha} = \frac{y_0}{\cos\beta} = \frac{z_0}{\cos\gamma}, \qquad t_0 = 0,$$

α, β, γ étant les angles avec les axes de coordonnées de la direction des génératrices du cylindre; il vient

$$(y\cos\gamma - z\cos\beta)^2 + (z\cos\alpha - x\cos\gamma)^2 + (x\cos\beta - y\cos\alpha)^2$$
$$= (b^2 + c^2)\cos^2\alpha + (c^2 + a^2)\cos^2\beta + (a^2 + b^2)\cos^2\gamma,$$

ou, en développant,

$$(58)\quad \left\{\begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2 - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2 \\ & \quad = a^2 + b^2 + c^2 - (a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma). \end{aligned}\right.$$

On voit que le cône se réduit à un cylindre de révolution circonscrit à la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2 - (a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma).$$

Or, si l'on mène un plan tangent à l'ellipsoïde perpendiculairement à la direction des génératrices du cylindre, ce plan coupe la sphère, lieu des sommets des trièdres trirectangles circonscrits, suivant un cercle qui est précisément le cercle directeur du cylindre (58). Ce résultat se voit d'ailleurs sans calcul, en remarquant que le lieu des intersections des plans rectangulaires tangents à un cylindre du second degré est un cylindre de révolution.

L'enveloppe du cylindre (58) est précisément la surface Δ.

En effet, écrivons α, β, γ au lieu de $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, l'équation (58) peut se mettre sous la forme

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - b^2 - c^2) + a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2$$
$$= (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2,$$

ou, d'après nos notations actuelles,

$$(1^\circ)\quad \alpha^2(S + a^2) + \beta^2(S + b^2) + \gamma^2(S + c^2) = (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2.$$

Égalons à zéro les dérivées par rapport à α, β, γ, il vient

$$\alpha(S + a^2) = x(\alpha x + \beta y + \gamma z),$$
$$\beta(S + b^2) = y(\alpha x + \beta y + \gamma z),$$
$$\gamma(S + c^2) = z(\alpha x + \beta y + \gamma z);$$

d'où

$$\alpha = \frac{x(\alpha x + \beta y + \gamma z)}{S + a^2},$$

$$\beta = \frac{y(\alpha x + \beta y + \gamma z)}{S + b^2},$$

$$\gamma = \frac{z(\alpha x + \beta y + \gamma z)}{S + c^2}.$$

Substituons ces dernières valeurs dans l'équation (1°), il reste

$$(59) \qquad \frac{x^2}{S + a^2} + \frac{y^2}{S + b^2} + \frac{z^2}{S + c^2} - 1 = 0,$$

ce qui est une forme de l'équation de la surface Δ; car, en réduisant, on a

$$S^3 + S^2 e + Sg + h = S^2(S + e) + S(G + g) + H + h,$$

ou

$$SG + H = 0.$$

33. *Cas où le plan* (u_0, v_0, w_0) *passe par le centre de l'ellipsoïde.*

Si, dans l'équation (34), n° 15, on remplace u_0, v_0, w_0 par $\frac{u_0}{r_0}, \frac{v_0}{r_0}, \frac{w_0}{r_0}$, puis qu'on fasse

$$r_0 = 0, \quad \frac{u_0}{\cos\alpha} = \frac{v_0}{\cos\beta} = \frac{w_0}{\cos\gamma},$$

α, β, γ étant les angles de l'axe du plan sécant avec les axes de coordonnées, il vient

$$(60) \qquad \left\{ \begin{aligned} &(b^2 + c^2)(v\cos\gamma - w\cos\beta)^2 \\ &+ (c^2 + a^2)(w\cos\alpha - u\cos\gamma)^2 \\ &+ (a^2 + b^2)(u\cos\beta - v\cos\alpha)^2 = 1, \end{aligned} \right.$$

ou, en développant,

$$(60\ bis) \qquad \left\{ \begin{aligned} &u^2(C\cos^2\beta + B\cos^2\gamma) + v^2(A\cos^2\gamma + C\cos^2\alpha) \\ &\quad + w^2(B\cos^2\alpha + A\cos^2\beta) - 2Avw\cos\beta\cos\gamma \\ &\qquad - 2Buw\cos\gamma\cos\alpha - 2Cuv\cos\alpha\cos\beta = 1. \end{aligned} \right.$$

Si l'on revient aux équations ponctuelles, on trouve que la conique (Γ) est définie par les deux équations

$$(60\ ter)\quad \begin{cases} Ax^2+By^2+Cz^2=BC\cos^2\alpha+CA\cos^2\beta+AB\cos^2\gamma, \\ x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=0. \end{cases}$$

Le lieu des points où les coniques (Γ) (60 *ter*) se rencontrent est encore la surface Δ.

En effet, en mettant α, β, γ au lieu de $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$, les équations (60 *ter*) peuvent s'écrire

$$\begin{gathered}(Ax^2+By^2+Cz^2-BC)\alpha^2+(Ax^2+By^2+Cz^2-CA)\beta^2 \\ +(Ax^2+By^2+Cz^2-AB)\gamma^2=0, \\ \alpha x+\beta y+\gamma z=0,\end{gathered}$$

ou encore

$$(1^\circ)\quad \begin{cases} (G-a^4)\alpha^2+(G-b^4)\beta^2+(G-c^4)\gamma^2=0, \\ \alpha x+\beta y+\gamma z=0. \end{cases}$$

En différentiant, on obtient

$$(2^\circ)\qquad \frac{\alpha(G-a^4)}{x}=\frac{\beta(G-b^4)}{y}=\frac{\gamma(G-c^4)}{z}.$$

Substituons ces valeurs de α, β, γ dans la première des équations (1°), on trouve

$$\frac{x^2}{G-a^4}+\frac{y^2}{G-b^4}+\frac{z^2}{G-c^4}=0,$$

ou

$$\begin{gathered} x^2(Ax^2+By^2+Cz^2-AB)(Ax^2+By^2+Cz^2-AC) \\ +y^2(Ax^2+By^2+Cz^2-BC)(Ax^2+By^2+Cz^2-BA) \\ +z^2(Ax^2+By^2+Cz^2-CA)(Ax^2+By^2+Cz^2-CB)=0, \end{gathered}$$

équation qui se réduit à celle de la surface Δ, après la suppression du facteur $Ax^2+By^2+Cz^2$.

De là :

Théorème XI. — *Lorsque le sommet du cône du com-*

plexe est à l'infini sur une direction (α, β, γ), *le cône se réduit à un cylindre de révolution, dont le cercle directeur est l'intersection, avec la sphère lieu des sommets des trièdres trirectangles circonscrits à l'ellipsoïde, du plan tangent à l'ellipsoïde mené perpendiculairement à la direction choisie. L'enveloppe de ces cylindres est la surface* Δ.

Lorsque le plan Π *passe par le centre de l'ellipsoïde, la conique* (Γ) *correspondante a pour centre celui de l'ellipsoïde, et est l'intersection du plan* Π *avec un ellipsoïde concentrique et homothétique à l'ellipsoïde* G; *le rapport des carrés des axes du premier à ceux du second est* $\frac{ABC}{g^2}p^2$, *p étant la distance du centre* O *au plan tangent à l'ellipsoïde* G *parallèle au plan* Π. *Le lieu des points de rencontre des coniques* (Γ) *est encore la surface* Δ.

34. Avant d'aborder la seconde question, remarquons que les sections de la surface Δ par les plans principaux de l'ellipsoïde sont

$$(61)\quad \left\{\begin{array}{lll} x = 0, & y = 0, & z = 0, \\ y^2 + z^2 = A, & z^2 + x^2 = B, & x^2 + y^2 = C, \\ By^2 + Cz^2 = BC, & Ax^2 + Cz^2 = AC, & Ax^2 + By^2 = AB. \end{array}\right.$$

Lorsque le plan Π (u_0, v_0, w_0) se confond avec un des plans principaux de l'ellipsoïde, avec le plan zOy par exemple, on a $v_0 = 0$, $w_0 = 0$, $r_0 = 0$, et l'équation (34), n° 15, rendue homogène, devient

$$Cv^2 + Bw^2 = 1 \quad \text{ou} \quad (x = 0,\ By^2 + Cz^2 = BC);$$

la conique (Γ) coïncide avec l'ellipse de la surface Δ située dans le plan yOz.

Lorsque le sommet P est à l'infini sur un des axes de l'ellipsoïde, sur l'axe Ox par exemple, on a $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, $t_0 = 0$, et l'équation (4), n° 4, rendue homogène, devient

$$y^2 + z^2 = A;$$

le cône est alors un cylindre ayant pour trace le cercle de la surface Δ situé dans le plan principal perpendiculaire à Ox.

Ainsi :

Théorème XII. — *Lorsque le plan* Π *se confond avec un des plans principaux de l'ellipsoïde donné, la conique* (Γ) *coïncide avec l'ellipse de la surface* Δ *située dans le plan principal considéré.*

Lorsque le sommet du cône est à l'infini sur un des axes principaux de l'ellipsoïde donné, le cône du complexe se réduit à un cylindre ayant pour trace le cercle de la surface Δ *situé dans le plan principal perpendiculaire à l'axe considéré.*

35. Pour la recherche qui nous occupe, c'est-à-dire l'étude de la situation des droites réelles du complexe, nous aurons à considérer surtout la section de la surface Δ par le plan xOz.

La section de la surface Δ par le plan xOz se compose des deux courbes

$$(62)\qquad \begin{cases} y = 0, & x^2 + z^2 = B \quad \text{(cercle)}, \\ y = 0, & Ax^2 + Cz^2 = AC \quad \text{(ellipse)}. \end{cases}$$

L'équation de la focale à l'ellipsoïde située dans le plan zOx est

$$(63)\qquad y = 0, \quad a_1^2 x^2 - c_1^2 z^2 = a_1^2 c_1^2 \quad \text{(hyperbole focale)}.$$

Le cercle et l'ellipse (62) se coupent au point (en ne considérant que celui dont les coordonnées sont positives)

$$(64)\quad (\mathrm{D})\quad x_0 = \frac{c_1\sqrt{\mathrm{C}}}{\sqrt{-b_1^2}},\quad y_0 = 0,\quad z_0 = \frac{a_1\sqrt{\mathrm{A}}}{\sqrt{-b_1^2}};$$

les tangentes en ce point à l'ellipse, à l'hyperbole focale et au cercle, sont

$$(65)\begin{cases} (\mathrm{T}_e) & c_1\dfrac{x}{\sqrt{\mathrm{C}}} + a_1\dfrac{z}{\sqrt{\mathrm{A}}} = \sqrt{-b_1^2} \quad \text{(tangente à l'ellipse)},\\ (\mathrm{T}_h) & \sqrt{\mathrm{C}}\dfrac{x}{c_1} - \sqrt{\mathrm{A}}\dfrac{z}{a_1} = \sqrt{-b_1^2} \quad \text{(tang. à l'hyp. focale)},\\ (\mathrm{T}_c) & xc_1\sqrt{\mathrm{C}} + za_1\sqrt{\mathrm{A}} = \mathrm{B}\sqrt{-b_1^2} \quad \text{(tangente au cercle)}.\end{cases}$$

On voit par là que :

L'hyperbole focale passe par le point de rencontre de l'ellipse et du cercle, et y coupe orthogonalement l'ellipse; l'ellipse de la surface Δ, *l'hyperbole focale et l'ellipse principale de l'ellipsoïde donné, situées dans le plan* zOx, *sont homofocales. L'ellipse et le cercle* (62) *se coupent sous un angle* V *dont la tangente est*

$$\operatorname{tang} \mathrm{V} = \frac{a_1 c_1}{\sqrt{\mathrm{AC}}}.$$

(*La suite prochainement.*)