NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 11 (1872), p. 457-477

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__457_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSEES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 899

(voir 2e série, t VIII, p 45),

PAR M. H. BROCARD.

Deux disques situés dans le même plan et ayant la forme d'ellipses égales sont mobiles chacun autour d'un *de leurs foyers supposé fixe; ces disques restent constamment tangents l'un à l'autre. On demande le lieu décrit par le point de contact.* (DAUPLAY.)

Soient M le point de contact des deux ellipses dans une certaine position; O, F les foyers fixes; O', F' les seconds foyers; d la distance OF.

Rapportons la première ellipse à son foyer O et à la droite OF; son équation sera

$$(1) \qquad \rho = \frac{p}{1 - e\cos(\omega - \alpha)},$$

α étant l'angle O'OF.

De même, si l'on prend F pour pôle et la direction FO pour axe polaire, la seconde ellipse aura pour équation

$$(2) \qquad \rho' = \frac{p}{1 - e\cos(\omega' - \alpha')},$$

α' étant alors l'angle F'FO.

Le triangle OMF donne la relation

$$(3) \qquad \rho'^2 = \rho^2 + d^2 - 2d\rho\cos\omega;$$

ainsi

$$(4) \qquad \sqrt{\rho^2 + d^2 - 2d\rho\cos\omega} = \frac{p}{1 - e\cos(\omega' - \alpha')}.$$

Cette relation exprime que le point M appartient aux deux ellipses. Il faut, en outre, exprimer qu'elles ont même tangente en ce point. Il suffit pour cela d'écrire

$$V + V' = \pi - (\omega + \omega');$$

donc

$$(5) \qquad \tang(V + V') = - \tang(\omega + \omega').$$

Mais, si l'on projette F en K sur OM, on a

$$\operatorname{tang}(\omega + \omega') = \frac{d \sin\omega}{d \cos\omega - \rho}.$$

D'ailleurs

$$\operatorname{tang} V = \frac{-p}{\sqrt{e^2\rho^2 - (\rho - p)^2}}$$

et

$$\operatorname{tang} V' = \frac{-p}{\sqrt{e^2\rho'^2 - (\rho' - p)^2}}.$$

L'équation (5) devient donc

$$\frac{\operatorname{tang} V + \operatorname{tang} V'}{1 - \operatorname{tang} V \operatorname{tang} V'} + \frac{d \sin\omega}{d \cos\omega - \rho} = 0$$

ou

$$\frac{-p\left(\dfrac{1}{\sqrt{e^2\rho^2 - (\rho - p)^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{e^2\rho'^2 - (\rho' - p)^2}}\right)}{1 - \dfrac{p^2}{\sqrt{[e^2\rho^2 - (\rho - p)^2][e^2\rho'^2 - (\rho' - p)^2]}}} + \frac{d \sin\omega}{d \cos\omega - \rho} = 0.$$

Il n'y a plus qu'à réduire et à remplacer ρ' par sa valeur tirée de (3).

La courbe représentée par cette équation admet le point milieu de OF pour centre et deux axes de symétrie rectangulaires, savoir : OF et la perpendiculaire à OF par le centre indiqué.

En admettant uniquement le contact extérieur des deux ellipses, la courbe n'existe que si l'on a

$$d < 2(a + c) \quad \text{ou} \quad d < \frac{2p}{1 - e}.$$

Question 925

(voir 2ᵉ série, t. VIII, p. 143);

PAR M. O. CALLANDREAU,
Candidat à l'École Polytechnique.

Démontrer qu'en développant, suivant les puissances ascendantes de λ, la quantité

$$(1)\qquad \frac{x + \frac{\lambda}{1} + \frac{\lambda^2}{1.2}x + \ldots}{1 + \frac{\lambda}{1}x + \frac{\lambda^2}{1.2} + \ldots} = \frac{e^{\lambda}(1+x) - e^{-\lambda}(1-x)}{e^{\lambda}(1+x) + e^{-\lambda}(1-x)},$$

le coefficient de λ^n est un polynôme L_n du $n^{ième}$ degré en x contenant le facteur $x^2 - 1$, et que l'équation

$$(2)\qquad \frac{L_n}{x^2 - 1} = 0$$

a toutes ses racines réelles, inégales et comprises entre -1 et $+1$. (CH. HERMITE.)

On aura le coefficient L_n de λ^n en différentiant n fois la fraction (1), et faisant dans le résultat $\lambda = 0$.

Si l'on désigne par φ le dénominateur de la fraction (1), considéré comme fonction de λ, φ' sera le numérateur, φ'' sera égal à φ, φ''' à φ',.... Il faut donc trouver les dérivées successives par rapport à λ de

$$\frac{\varphi'}{\varphi}.$$

La dérivée première est

$$\frac{\varphi\varphi'' - \varphi'^2}{\varphi^2},$$

ou, d'après ce qui a été dit,

$$1 - \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2.$$

Sans aller plus loin, on voit que toutes les dérivées seront des fonctions entières de $\frac{\varphi'}{\varphi}$ d'un degré égal à leur ordre augmenté d'une unité; on voit qu'elles contiendront toutes le facteur

$$1 - \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2,$$

puisque la dérivée de $\frac{\varphi'}{\varphi}$ est $1 - \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2$, et que les dérivées sont des fonctions entières de $\frac{\varphi'}{\varphi}$.

Il faut maintenant faire dans ces dérivées $\lambda = 0$. Or, si l'on fait $\lambda = 0$, $\frac{\varphi'}{\varphi}$ est égal à x; les coefficients L_n seront donc des fonctions entières de x contenant $1 - x^2$ en facteur.

On formera un coefficient quelconque par la loi suivante

$$X_{n+1} = X'_n(1 - x^2) - 2xX_n,$$

les X étant les coefficients L débarrassés du facteur $1 - x^2$.

X_{n+1} est donc la dérivée du polynôme $X_n(1 - x)^2$, et si ce dernier a toutes ses racines réelles, inégales, comprises entre -1 et $+1$, il en est de même de X_{n+1}; or les premiers polynômes sont dans ce cas; donc, etc.

Note. — La même question a été résolue par M. H. Brocard.

Question 974

(voir 2e série, t VIII, p 563);

PAR M. OCTAVE ESPANET,

Élève du lycée de Nîmes.

On donne une courbe gauche résultant de l'intersection de deux surfaces du second degré ayant mêmes *plans de symétrie; par deux points pris sur cette courbe, on mène les plans normaux. Les milieux des trois segments, interceptés sur chacun des axes de symétrie entre les deux plans normaux et le point milieu de la corde qui joint les deux points de la courbe, sont dans un plan, et ce plan est perpendiculaire à la corde.*

(LAGUERRE.)

Soient les équations des deux surfaces rapportées à leurs plans de symétrie communs

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 1 = 0,$$
$$A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 - 1 = 0;$$

soient deux points M et N pris sur la courbe d'intersection de ces deux surfaces, et soient x, y, z, x', y', z' leurs coordonnées; nous aurons les relations

$$(1) \qquad Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 1 = 0,$$
$$(2) \qquad A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 - 1 = 0,$$
$$(3) \qquad Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 - 1 = 0,$$
$$(4) \qquad A'x'^2 + B'y'^2 + C'z'^2 - 1 = 0.$$

Les équations de la tangente à la courbe au point M étant

$$AxX + ByY + CzZ - 1 = 0,$$
$$A'xX + B'yY + C'zZ - 1 = 0,$$

l'équation du plan normal, c'est-à-dire du plan perpendiculaire à la tangente en M, sera

$$(BC' - CB')yz(X - x) + (CA' - AC')zx(Y - y) + (AB' - BA')xy(Z - z) = 0.$$

Il est bien facile d'avoir les segments compris sur les axes entre l'origine et ce plan; on trouve ainsi les longueurs

$$x\,\frac{BC'-CB'+CA'-AC'+AB'-BA'}{BC'-CB'}$$

sur l'axe des x,

$$y\,\frac{BC'-CB'+CA'-AC'+AB'-BA'}{CA'-AC'}$$

sur l'axe des y,

$$z\,\frac{BC'-CB'+CA'-AC'+AB'-BA'}{AB'-BA'}$$

sur l'axe des z.

Les segments correspondants pour le plan normal au point N s'obtiendront en remplaçant, dans ces valeurs, x par x', y par y', z par z'.

Les distances comprises entre l'origine et les milieux des trois segments considérés auront alors pour valeurs

$$a=\frac{x+x'}{2}\,\frac{BC'-CB'+CA'-AC'+AB'-BA'}{BC'-CB'},$$

$$b=\frac{y+y'}{2}\,\frac{BC'-CB'+CA'-AC'+AB'-BA'}{CA'-AC'},$$

$$c=\frac{z+z'}{2}\,\frac{BC'-CB'+CA'-AC'+AB'-BA'}{AB'-BA'}.$$

L'équation du plan passant par ces trois points sera donc

$$\frac{X}{a}+\frac{Y}{b}+\frac{Z}{c}-1=0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{X(BC'-CB')}{x+x'}+\frac{Y(CA'-AC')}{y+y'}+\frac{Z(AB'-BA')}{z-z'}$$
$$=\frac{BC'-CB'+CA'-AC'+AB'-BA'}{2};$$

on peut l'écrire encore

$$\left(X - \frac{x+x'}{2}\right)(BC' - CB')(y+y')(z+z')$$
$$+\left(Y - \frac{y+y'}{2}\right)(CA' - AC')(z+z')(x+x')$$
$$+\left(Z - \frac{z+z'}{2}\right)(AB' - BA')(x+x')(y+y') = 0,$$

et sous cette forme on voit que le plan passe par le milieu de la corde MN.

Il reste à faire voir que ce plan est perpendiculaire à la corde MN, dont les équations sont

$$\frac{X-x}{x-x'} = \frac{Y-y}{y-y'} = \frac{Z-z}{z-z'}.$$

Les conditions pour que le plan

$$mx + ny + pz + q = 0$$

et la droite

$$x = az + r,$$
$$y = bz + s$$

soient perpendiculaires sont que

$$\frac{m}{a} = \frac{n}{b} = \frac{p}{1}.$$

Les égalités à vérifier ici, pour démontrer le théorème en question, sont donc

$$\frac{(BC' - CB')(y+y')(z+z')}{x-x'} = \frac{(CA' - AC')(z+z')(x+x')}{y-y'}$$
$$= \frac{(AB' - BA')(x+x')(y+y')}{z-z'}.$$

Je dis que ces égalités ont lieu. En effet, reprenons les égalités qui expriment que les points M et N sont sur la courbe donnée. En retranchant l'équation (3) de l'équation (1), on a

$$(5)\quad A(x+x')(x-x')+B(y+y')(y-y')+C(z+z')(z-z')=0;$$

en retranchant l'équation (4) de l'équation (2), on a

$$(6)\quad A'(x+x')(x-x')+B'(y+y')(y-y')+C'(z+z')(z-z')=0.$$

Multiplions l'équation (5) par A', l'équation (6) par A, et retranchons, il vient

$$(AB'-BA')(y+y')(y-y')=(CA'-AC')(z+z')(z-z'),$$

d'où l'on déduit, en multipliant les deux membres par $\dfrac{x+x'}{(y-y')(z-z')}$,

$$\frac{(AB'-BA')(x+x')(y+y')}{z-z'}=\frac{(CA'-AC')(z+z')(x+x')}{y-y'}.$$

On démontrerait de même, en multipliant l'équation (5) par B' et l'équation (6) par B, que l'on a

$$\frac{(AB'-BA')(x+x')(y+y')}{z-z'}=\frac{(BC'-CB')(y+y')(z+z')}{x-x'}.$$

Il est donc démontré que le plan considéré est perpendiculaire sur la corde MN.

Question 1030

(voir 2^e série, t. X, p. 335);

Par M. YLLIAC DE GOÏSEL.

Étant pris trois diamètres conjugués d'une surface du second degré, si l'on projette chacun d'eux sur une droite perpendiculaire au plan des deux autres, la somme des valeurs inverses des carrés de ces projections est constante. (H. Faure.)

La projection d'un des diamètres conjugués sur une droite perpendiculaire au plan des deux autres n'est autre chose que la hauteur du parallélépipède construit sur les trois diamètres conjugués, hauteur relative au plan des deux autres diamètres.

Au lieu de considérer les diamètres, considérons leurs moitiés, et démontrons le théorème pour ces moitiés. Désignons les demi-axes par a, b, c, et par les numéros 1, 2, 3 les demi-diamètres conjugués considérés, en appelant A l'aire du parallélogramme construit sur (1, 2), A' l'aire du parallélogramme construit sur (1, 3) et A'' l'aire du parallélogramme construit sur (2, 3). Désignons d'ailleurs par h, h', h'' les hauteurs des parallélépipèdes qui, ayant respectivement pour bases A, A', A'', auraient pour troisième arête le demi-diamètre conjugué du plan de la base.

D'après un des théorèmes d'Apollonius, on a

$$\mathrm{A}h = \mathrm{A}'h' = \mathrm{A}''h'' = abc,$$

d'où

$$\frac{1}{h^2} = \frac{\mathrm{A}^2}{a^2b^2c^2}, \quad \frac{1}{h'^2} = \frac{\mathrm{A}'^2}{a^2b^2c^2}, \quad \frac{1}{h''^2} = \frac{\mathrm{A}''^2}{a^2b^2c^2}.$$

Ajoutons ces trois égalités membre à membre, il vient

$$\frac{1}{h^2} + \frac{1}{h'^2} + \frac{1}{h''^2} = \frac{\mathrm{A}^2 + \mathrm{A}'^2 + \mathrm{A}''^2}{a^2b^2c^2}.$$

Mais on sait que la somme des carrés des aires des parallélogrammes construits sur trois diamètres conjugués est constante; donc

$$\mathrm{A}^2 + \mathrm{A}'^2 + \mathrm{A}''^2 = \text{const.} = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2;$$

donc

$$\frac{1}{h^2} + \frac{1}{h'^2} + \frac{1}{h''^2} = \frac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{a^2b^2c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Ainsi le théorème est démontré.

Note. — **La même question a été résolue par MM. Genty, ingénieur des Ponts et Chaussées; V. Hioux, professeur à Saint-Étienne; Pellissier, capitaine d'artillerie; Moret-Blanc, professeur au lycée du Havre; E. Magenc, élève du lycée de Lille.**

Question 1051

(voir 2ᵉ série, t. X, p. 558);

PAR M. DOUCET.

Si l'on désigne par $2p$ *le périmètre d'un triangle, par* r *le rayon du cercle inscrit, et par* R *le rayon du cercle circonscrit :* 1° *l'équation du troisième degré*

$$(1)\qquad x^3-(4R+r)x^2+p^2x-p^2r=0$$

a ses trois racines réelles et positives ; 2° *entre* R, r *et* p, *on a*

$$(4R+r)^2 \geqq 3p^2 \geqq 9r(4R+r).$$

(P.-A.-G. COLOMBIER.)

En posant

$$x=\frac{pr}{p-y},$$

on obtient l'équation

$$(2)\qquad y^3-2py^2+[p^2+r(4R+r)]y-4pRr=0,$$

qui, évidemment, a pour racines les côtés du triangle. La réalité des racines de l'équation (2) entraîne celle des racines de l'équation (1). Ces dernières représentent les rayons des trois cercles exinscrits au triangle.

Les conditions formulées (2°), entre R, r et p, s'obtiennent en exprimant que les équations dérivées de (1) et de (2) ont leurs racines réelles.

En effet, ces équations dérivées sont

$$3x^2-2(4R+r)x+p^2=0,$$
$$3y^2-4py+p^2+r(4R+r)=0;$$

la première donne

$$(4R + r)^2 \geqq 3p^2,$$

et la seconde

$$p^2 \geqq 3r(4R + r).$$

On a ainsi

$$(4R + r)^2 \geqq 3p^2 \geqq 9r(4R + r).$$

Question 1054

(voir 2e série, t. X, p. 558);

Par M. A. PELLISSIER,
Capitaine d'Artillerie.

Par un point P, *on mène à un cercle* C *une sécante* PMN : *trouver le lieu géométrique de l'intersection de deux circonférences passant, l'une par les points* P *et* N, *l'autre par les points* P *et* M, *et toutes deux tangentes à la circonférence* C. (Callandreau.)

Soient O et O′ les centres des deux circonférences tangentes aux points M, N au cercle C, et Q le second point d'intersection de ces circonférences.

Les droites CMO, PO′ sont parallèles, puisque les circonférences O′ et C sont tangentes au point N; et, de même, les droites O′CN et PO sont parallèles. Donc le quadrilatère OPCO′ est un parallélogramme, et la diagonale PC est divisée en deux parties égales, au point R, par la diagonale OO′. D'un autre côté, OO′ est perpendiculaire au milieu de PQ, corde commune aux deux circonférences O, O′; donc QR = RP = RC; par conséquent, le lieu géométrique du point Q est la circonférence décrite du point R comme centre avec $\frac{1}{2}$ PC pour rayon.

Note. — Cette question a été résolue par MM. C. Le Paige, étudiant à Liége; Droiteau, élève du lycée de Moulins; Magenc, du lycée de Lille; Léon Lecornu, du lycée de Caen; Bertillon, du lycée du Havre; Dautheville, Gambey, Lez et Brocard.

Question 1056

(voir 2e série, t. XI, p. 48);

PAR M. MORET-BLANC,
Professeur au lycée du Havre.

Soit une fonction $f(x)$ quelconque, finie et continue dans l'intervalle de a à x. Insérons, entre a et x, $(n-1)$ moyens géométriques $a\sqrt[n]{\frac{x}{a}}$, $a\sqrt[n]{\left(\frac{x}{a}\right)^2}, \ldots,$ $a\sqrt[n]{\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1}}$, et désignons par $\mathrm{M}g$ *la moyenne arithmétique des valeurs*

$$f(a),\quad f\left(a\sqrt[n]{\frac{x}{a}}\right),\ldots,\quad f\left[a\sqrt[n]{\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1}}\right],\quad f(x).$$

D'un autre côté, insérons $(n-1)$ moyens arithmétiques $a+\frac{x-a}{n}$, $a+2\frac{(x-a)}{n},\ldots,$ $a+(n-1)\frac{(x-a)}{n}$, entre a et x, et désignons par $\mathrm{M}a$ *la moyenne arithmétique des valeurs*

$$\frac{f(a)}{a},\quad \frac{f\left(a+\frac{x-a}{n}\right)}{a+\frac{x-a}{n}},\ldots,\quad \frac{f\left[a+(n-1)\frac{(x-a)}{n}\right]}{a+(n-1)\frac{x-a}{n}},\quad \frac{f(x)}{x}.$$

Lorsque n tend vers l'infini, le rapport $\frac{\mathrm{M}a}{\mathrm{M}g}$ tend vers une limite complétement indépendante de la fonction f; cette limite est $\frac{\log\frac{x}{a}}{x-1}$. (F. DIDON.)

Soit d'abord

$$f(x) = x^{m+1},$$

m étant un nombre donné quelconque.

$$\mathrm{M}a = \frac{1}{n+1}\left[a^m + \left(a + \frac{x-a}{n}\right)^m + \ldots + \left(a + n\frac{x-a}{n}\right)^m\right],$$

ou, en développant et désignant par S_p la somme des puissances $p^{\text{ièmes}}$ des n premiers nombres,

$$\begin{aligned}\mathrm{M}a = a^m &+ \frac{m}{1}\,\frac{S_1}{(n+1)n}(x-a)\\ &+ \frac{m(m-1)}{1.2}\,\frac{S_2}{(n+1)n^2}(x-a)^2 + \ldots\\ &+ \frac{m(m-1)\ldots 2.1}{1.2\ldots m}\,\frac{S_m}{(n+1)n^m}.\end{aligned}$$

Or on a

$$\begin{aligned}(p+1)S_p = (n+1)^{p+1} &- \frac{(p+1)p}{1.2}S_{p-1}\\ &- \frac{(p+1)p(p-1)}{1.2.3}S_{p-2} - \ldots\\ &- (p+1)S_1 - (n+1),\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{(p+1)S_p}{(n+1)n^p} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^p - \frac{\dfrac{(p+1)p}{1.2}S_{p-1} + \ldots + (p+1)S_1 + (n+1)}{(n+1)n^p}.$$

Le numérateur de la dernière fraction est du degré p en n; donc à la limite, pour $n = \infty$, cette fraction s'annule, et l'on a

$$\lim \frac{(p+1)S_p}{(n+1)n^p} = \lim\left(\frac{n+1}{n}\right)^p = 1,$$

d'où

$$\lim \frac{S_p}{(n+1)n^p} = \frac{1}{p+1},$$

et

$$\lim \mathrm{M}a = a^m + \frac{m}{1.2} a^{m-1}(x-a) + \frac{m(m-1)}{1.2.3} a^{m-2}(x-a)^2 + \ldots$$
$$+ \frac{1}{m+1}(x-a)^m.$$

Multipliant les deux membres de cette égalité par $(m+1)(x-a)$, et ajoutant de part et d'autre a^{m+1}, il vient

$$(m+1)(x-a)\lim \mathrm{M}a + a^{m+1}$$
$$= a^{m+1} + \frac{m+1}{1} a^m(x-a) + \frac{(m+1)m}{1.2} a^{m-1}(x-a)^2 + \ldots + (x-a)^{m+1}$$
$$= [a + (x-a)]^{m+1} = x^{m+1},$$

d'où

$$\lim \mathrm{M}a = \frac{x^{m+1} - a^{m+1}}{(m+1)(x-a)}.$$

D'autre part

$$\mathrm{M}g = \frac{1}{n+1}\left[a^{m+1} + a^{m+1}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{m+1}{n}} + a^{m+1}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2(m+1)}{n}} + \ldots + x^{m+1}\right]$$
$$= \frac{x^{m+1}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{m+1}{n}} - a^{m+1}}{(n+1)\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{m+1}{n}} - 1\right]}.$$

Pour $n = \infty$, le numérateur se réduit à $x^{m+1} - a^{m+1}$; le dénominateur se présente sous la forme indéterminée $\infty \times 0$.

Mais on peut l'écrire

$$\frac{\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{m+1}{n}} - 1}{\frac{1}{n+1}};$$

et, en prenant les dérivées des deux termes par rapport à n, on a

$$\lim \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{m+1}{n}} - 1}{\frac{1}{n+1}} = \lim \frac{-\frac{m+1}{n^2}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{m+1}{n}} l.\frac{x}{a}}{-\frac{1}{(n+1)^2}}$$

$$= \lim (m+1)\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 l.\frac{x}{a} = (m+1)\,l.\frac{x}{a}.$$

Donc

$$\lim \mathrm{M}g = \frac{x^{m+1} - a^{m+1}}{(m+1)\,l.\frac{x}{a}},$$

et, par suite,

$$\lim \frac{\mathrm{M}a}{\mathrm{M}g} = \frac{l.\frac{x}{a}}{x-a},$$

le logarithme étant pris dans le système népérien. Cette limite est indépendante de m.

Si l'on prenait $f(x) = \mathrm{A}x^{m+1}$, cette hypothèse ne ferait qu'introduire le facteur A dans chaque terme du rapport $\frac{\mathrm{M}a}{\mathrm{M}g}$, ce qui ne changerait rien à ce rapport.

Le théorème s'applique donc à toute fonction de la forme $\mathrm{A}x^{m+1}$, quelles que soient les constantes A et m, et, par conséquent, à toute somme algébrique de termes de cette forme, puisque, dans toute suite de rapports égaux, la somme algébrique des numérateurs divisée par celle des dénominateurs donne un rapport égal à chacun des rapports proposés.

Ce théorème est donc démontré pour tout polynôme en x, et en général pour toute fonction de x susceptible d'être développée en série ordonnée suivant les puissances de la variable, et convergente pour les valeurs de cette variable comprises entre les deux limites données.

Note. — Cette question a aussi été résolue par M. Al. Strnad, élève de l'École Polytechnique de Prague, et par M. N. Androusski, étudiant à l'Université de Varsovie.

Question 1071

(voir 2e série, t. XI, p. 144);

PAR M. GAMBEY.

Les deux circonférences, menées par les foyers d'une conique et qui touchent une tangente de cette conique, se coupent toujours sous le même angle.

(H. FAURE.)

Les équations de la conique et des deux cercles étant

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

$$x^2 + y^2 - 2\beta y - c^2 = 0,$$

$$x^2 + y^2 - 2\beta' y - c^2 = 0,$$

les conditions pour que la droite

$$y = mx + n$$

soit tangente commune à ces courbes sont

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} n^2 = a^2 m^2 + b^2, \\ m^2\beta^2 + 2\beta n + c^2(m^2+1) - n^2 = 0, \\ m^2\beta'^2 + 2\beta' n + c^2(m^2+1) - n^2 = 0. \end{array} \right.$$

Mais, si V est l'angle des rayons aboutissant au foyer, on a

$$(2) \qquad \operatorname{tang} V = \frac{c(\beta' - \beta)}{c^2 + \beta\beta'}.$$

Or, des relations (1) on tire

$$\beta + \beta' = -\frac{2n}{m^2},$$

$$\beta\beta' = \frac{c^2(m^2+1) - n^2}{m^2},$$

d'où l'on déduit facilement

$$\beta' - \beta = \frac{2b(1+m^2)}{m^2}.$$

Substituant dans l'équation (2) les valeurs de $\beta' - \beta$ et de $\beta\beta'$, effectuant les calculs, réduisant, et tenant compte de la première des relations (1), il vient

$$\operatorname{tang} V = \frac{2bc}{c^2 - b^2},$$

quantité indépendante des paramètres variables β et β', m et n.

Note du Rédacteur. — MM. Louis Morel, Pellissier, Brocard, Moret-Blanc et Leon Lecornu ont trouve de même, au moyen de differents calculs, la formule $\operatorname{tang} V = \frac{2bc}{c^2 - b^2}$, qui montre que l'angle sous lequel se coupent les deux circonferences dont il s'agit est egal a celui que forment les deux rayons vecteurs menes de l'un des foyers de l'ellipse aux extremites du petit axe de cette courbe.

C'est aussi ce qui resulte de quelques proprietes geometriques que nous allons indiquer.

Soient A′A, B′B les deux axes $2a$, $2b$ de l'ellipse; O le centre, F, F′ les foyers de la courbe; C, C′ les centres de deux circonferences passant par les foyers et qui touchent une tangente menee a l'ellipse en un point quelconque D; et M le point d'intersection de cette tangente et du grand axe A′A prolonge.

1° Les points t, t', où la tangente quelconque MD coupe les deux tangentes fixes menées à l'ellipse par les extrémites B, B′ du petit axe, sont precisement les points auxquels les circonferences C, C′ touchent la tangente MD.

Pour le demontrer, il suffit de faire voir que $MF \times MF' = \overline{Mt}^2$. Or, si l'on abaisse des foyers F, F′ des perpendiculaires FP, F′P′ sur la tangente MD, et du point t une perpendiculaire tH sur le grand axe A′AM, on aura d'abord

$$FP \times F'P' = \overline{tH}^2,$$

puisque le produit des distances des foyers à une tangente quelconque est égal au carré b^2 de la moitié du petit axe. Mais les triangles rectangles FPM, F′P′M, tHM étant semblables, leurs hypoténuses MF, MF′, Mt sont proportionnelles aux côtés FP, FP′, tH des angles droits ; donc

$$MF \times MF' = \overline{Mt}^2.$$

2° L'angle tFt' des droites menées d'un foyer aux points de contact t, t' est invariable et égal à l'angle BFM du rayon vecteur FB et du grand axe.

En effet, on sait que la droite Ft menée d'un foyer au point de concours de deux tangentes tB, tD est bissectrice de l'angle BFD des rayons vecteurs FB, FD conduits aux points de contact; donc

$$tFD = \frac{1}{2}\,BFD \quad \text{et} \quad t'FD = \frac{1}{2}\,B'FD;$$

d'où, par addition,

$$tFt' = \frac{1}{2}\,(BFD + B'FD) = \frac{1}{2}\,(BFM + B'FM) = BFM.$$

On a de même

$$tF't' = BF'M.$$

3° La somme des angles FtF′, Ft'F′, sous lesquels la distance focale FF est vue des deux points de contact t, t', est aussi une quantité constante égale à l'angle FBF′.

Car

$$FtF' = tFM - tF'M \quad \text{et} \quad Ft'F' = t'FM - t'F'M;$$

il s'en suit

$$FtF' + Ft'F' = tFt' - tF't' = BFM - BF'M = FBF'.$$

4° Les deux circonférences C, C′ se coupent sous un angle CFC′ invariable, et égal à l'angle BFB′.

Car $CFC' = 2^d - (C'CF + CC'F)$; mais les angles C′CF, CC′F, aux centres des cercles C, C′, sont respectivement égaux aux angles inscrits FtF′, Ft'F′; donc

$$CFC' = 2^d - (FtF' + Ft'F') = 2^d - FBF' = BFB'.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer. (G.)

Question 1082

(voir 2e série, t. XI, p. 240);

PAR M. MORET-BLANC,
Professeur au lycée du Havre.

Montrer que, pour toutes les valeurs entières et positives des trois quantités m, n, p (en supposant, bien entendu, $p > m+n$), la suite terminée

$$\begin{aligned} & m(m+1)(m+2)\ldots(m+n) \\ & \quad + (m+1)(m+2)(m+3)\ldots(m+n+1) \\ & \quad + (m+2)(m+3)(m+4)\ldots(m+n+2) \\ & \quad + (m+3)(m+4)(m+5)\ldots(m+n+3) \\ & \quad + \ldots + (p-n)(p-n+1)(p-n+2)\ldots(p-2)(p-1)p \end{aligned}$$

a pour valeur

$$\frac{(p+1)p(p-1)\ldots(p-n)-(m+n)(m+n-1)\ldots m(m-1)}{n+2}.$$

(HATON DE LA GOUPILLIÈRE.)

Je représenterai, pour abréger, la première expression par Σ_p. Son identité avec la seconde se vérifie immédiatement pour $p = m+n$, quels que soient les nombres entiers positifs m et n. Il suffit donc de prouver que, si cette identité a lieu pour une valeur de p, elle subsiste encore quand on augmente p d'une unité, c'est-à-dire que, si l'on a

$$\sum_p = \frac{(p+1)p(p-1)\ldots(p-n)-(m+n)(m+n-1)\ldots m(m-1)}{n+2},$$

on aura encore

$$\sum_{p+1} = \frac{(p+2)(p+1)p\ldots(p-n+1)-(m+n)(m+n-1)\ldots m(m-1)}{n+2}.$$

Or

$$\sum_{p+1} = \sum_p + (p-n+1)(p-n+2)\ldots(p-1)p(p+1)$$

$$= \frac{(p+1)p\ldots(p-n+1)(p-n+n+2) - (m+n)(m+n-1)\ldots(m-1)}{n+2}$$

$$= \frac{(p+2)(p+1)\ldots(p-n+1) - (m+n)(m+n-1)\ldots(m-1)}{n+2},$$

C. Q. F. D.

Note. — La même question a été résolue par M. Ant. Jerábek, étudiant à l'Université de Prague.