Concours d’admission à l’École polytechnique (année 1872)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 11 (1872), p. 453-457

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__453_0>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.
(ANNÉE 1872.)

Composition de Mathématiques.

On donne deux axes de coordonnées rectangulaires et deux droites (A) et (B) respectivement parallèles aux axes, et l'on demande :

1° De former l'équation générale des courbes du second degré qui ont pour centre l'origine des coordonnées et qui admettent comme normales les droites données (A) et (B);

2° De démontrer que, par un point du plan, il passe en général trois de ces courbes, à savoir deux ellipses et une hyperbole;

3° De faire connaître les points du plan pour lesquels cette règle générale souffre une exception.

Composition de Géométrie descriptive.

Trouver l'intersection d'une sphère et d'un cylindre de révolution définis de la manière suivante :

La sphère à 10 centimètres de rayon; elle est tangente aux deux plans de projection.

Le cylindre a 7 centimètres de rayon; son axe passe par le point le plus haut de la sphère, est parallèle au plan vertical et fait un angle de 45 degrés avec le plan horizontal.

On indiquera les constructions employées pour obtenir un point quelconque de l'intersection et la tangente en ce point. On représentera le solide commun au cylindre et à la sphère.

Composition de Trigonométrie.

Étant donnés dans un triangle ABC les côtés, savoir :

$$a = 14418^{m},58,$$
$$b = 28381^{m},14,$$
$$c = 35218^{m},76,$$

trouver les trois angles.

Solution de la question de Mathématiques :

PAR M. X***.

Soient Ox, Oy les axes de coordonnées (*); ASB, CSD les droites données parallèles aux axes; $OS = l$.

Soient M et N les points où l'une des coniques rencontre normalement les droites données AB, CD. Par ces points, menons MT et NT parallèles aux axes, ces droites seront tangentes à la conique; MN sera la polaire du point T : elle sera donc partagée en ω en deux parties égales par le diamètre OT; la figure MTNS étant un rectangle, la ligne $T\omega$ ou TO sera la seconde diagonale, et passera par le point S.

Cela posé, le pôle T se mouvant le long de OS, le rectangle MSNT reste semblable à lui-même, et MN a une direction fixe. Prenons pour axe des x' la droite OT, et pour axe des y' la parallèle à la direction fixe MN : Ox' et Oy' seront un système de diamètres conjugués pour toutes les coniques satisfaisant à la question, car la polaire MN est conjuguée du diamètre Ox' qui passe par le pôle.

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

Prenons $OT = \rho$ pour variable, et appelons a et b les demi-diamètres conjugués, suivant les axes, de la conique qui passe en M et N; l'angle droit MTN étant circonscrit à la conique, on a

$$(1) \qquad \rho^2 = \overline{OT}^2 = a^2 + b^2.$$

On sait, en outre, que a est moyen proportionnel entre OT et $O\omega$, ou entre ρ et $\frac{\rho + l}{2}$: donc

$$(2) \qquad a^2 = \rho\frac{\rho + l}{2}.$$

Des équations (1) et (2), on tire

$$b^2 = \rho\frac{\rho - l}{2},$$

et l'équation de la conique

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

s'écrit

$$\frac{x^2}{\rho(\rho + l)} + \frac{y^2}{\rho(\rho - l)} = \frac{1}{2},$$

ou, si l'on veut,

$$(3) \qquad \frac{x^2}{\rho + l} + \frac{y^2}{\rho - l} - \frac{\rho}{2} = 0.$$

Si l'on donne successivement à ρ les valeurs

$$-\infty, \quad -l \mp \varepsilon, \quad +l \mp \varepsilon, \quad +\infty,$$

ε étant très-petit, on reconnaît que le premier membre de l'équation (3) prend les signes

$$+, \quad -+, \quad --, \quad -;$$

ce qui met en évidence l'existence de trois racines réelles, ρ étant considéré comme une inconnue et x, y comme des quantités données. Donc, par un point (x, y) passent trois coniques : une ellipse, pour la valeur de ρ comprise entre $-\infty$ et $-l$; une hyperbole, pour la valeur de ρ comprise entre $-l$ et $+l$; une ellipse, pour la valeur de ρ comprise entre $+l$ et $+\infty$. L'hyperbole se réduit à deux droites, lorsque $\rho = 0$; ce qui a lieu pour $x = \pm y$.

Il n'y a d'exception à cette règle que si l'on a

1° $$x = 0 \quad \text{ou} \quad y = 0,$$

2° $$l = 0.$$

Dans le premier cas, les points exceptionnels sont situés sur les droites Ox' et Oy'; si l'on suppose, par exemple, $x = 0$, l'équation (3) se partage en deux autres

$$2y^2 = \rho(\rho - l), \quad \rho = -l,$$

ou

$$\rho^2 - l\rho - 2y^2 = 0, \quad \rho = \frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2}{4} + 2y^2}:$$

l'une des valeurs de ρ est positive et supérieure à l, et l'autre est négative. A la racine positive correspond une ellipse; à la racine négative correspond une ellipse, l'axe des y', ou une hyperbole, selon que l'on a

$$l + \frac{l}{2} - \sqrt{\frac{l^2}{4} + 2y^2} \lesseqgtr 0.$$

Cette inégalité peut être remplacée par la suivante

$$l \lesseqgtr \text{val. abs. de } y.$$

La conique, qui semble avoir disparu, correspond à $\rho = -l$; elle se réduit à la droite $x = 0$.

Dans le second cas, l'équation (3) devient

$$x^2 + y^2 = \frac{\rho^2}{2};$$

mais cette solution ne doit pas être regardée comme répondant *a priori* à la question, la droite OS disparaissant alors ou plutôt devenant indéterminée. Comme, dans le cas où $l = 0$, la solution de la question est évidente, nous ne nous y arrêterons pas.

On pourrait faire diverses remarques intéressantes au sujet de l'équation (3). Nous nous bornerons à observer que, après l'évanouissement des dénominateurs, cette équation est du troisième degré en ρ, mais ne contient pas de terme en ρ^2; la somme des racines y est donc nulle, et, par suite, les trois valeurs de ρ, correspondant à un point donné du plan, fournissent trois pôles T : l'un T_1 entre S et x', l'autre T_2 entre S et son symétrique; quant au troisième T_3, sa construction est facile et se déduit de la relation

$$OT_1 \pm OT_2 = OT_3,$$

lorsque T_1 et T_2 sont connus. Cette remarque facilite l'épure relative à la construction des trois coniques qui passent par un point donné du plan.