Nouvelles annales de mathématiques

Concours d'agrégation de 1872

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 11 (1872), p. 450-452

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__450_1>

CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1872.

Solution de la question de Mathématiques;

PAR M. CROSNIER.

On donne deux droites Δ et Δ' qui ne se rencontrent pas; par ces droites on fait passer des surfaces S *du second ordre, pour lesquelles la somme des carrés des longueurs algébriques des axes ainsi que le produit de* *ces longueurs sont des quantités constantes et données :*

1° *Trouver le lieu des centres des surfaces* S;

2° *Considérant une quelconque de ces surfaces et le centre* I, *on mène par ce point* I *une droite rencontrant en* D *et* D′ *les deux droites fixes; on demande de calculer* DD′;

3° *Par les points* D *et* D′ *on mène des plans respectivement perpendiculaires aux droites* Δ *et* Δ′; *on demande le lieu des intersections de ces plans.*

Il est facile de démontrer que le lieu demandé est le lieu des points milieux de deux droites de grandeurs données qui glissent sur deux droites non situées dans un même plan.

En effet, soient I le centre de l'une des surfaces S et DID′ la droite menée par ce point et qui rencontre les droites Δ et Δ′. Cette ligne est un diamètre de la surface; par suite, le point I en est le milieu : il est donc sur le plan parallèle aux deux droites données et qui en est équidistant. J'appelle P ce plan qui contient le lieu demandé. Les génératrices de la surface qui passent en D et D′ sont respectivement parallèles; d'où il suit que les plans tangents en D et D′ sont parallèles au plan P, qui est, par conséquent, le plan conjugué de la droite DD′, et la section de la surface par ce plan a ses asymptotes parallèles aux droites Δ et Δ′. Les diverses courbes que l'on obtient de la sorte sont semblables, puisque leurs asymptotes sont parallèles. Appelons a et b les axes de l'une, et soit $2p$ la plus courte distance des droites Δ et Δ′; le parallélépipède construit sur un système de diamètres conjugués a un volume constant. D'après les données, abp est donc constant; et comme a et b varient proportionnellement, ces quantités sont elles-mêmes constantes.

En second lieu, a, b et ID forment un système de diamètres conjugués. La somme algébrique des carrés a^2, b^2, $\overline{\mathrm{ID}}^2$ est donc égale à la somme des carrés des axes, et, comme cette somme est donnée et égale à m^2, on a

$$a^2 - b^2 + \overline{\mathrm{ID}}^2 = m^2,$$

ou

$$b^2 - a^2 + \overline{\mathrm{ID}}^2 = m^2;$$

d'où, pour ID, deux valeurs constantes. La proposition est donc démontrée.

Il est évident que le lieu des milieux d'une droite de longueur constante qui glisse sur deux droites qui ne se rencontrent pas est une ellipse; car sa projection sur le plan P est de longueur constante. C'est, en effet, le second côté de l'angle droit d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse et l'autre côté sont constants. Les axes de l'ellipse sont les bissectrices des angles des projections des droites Δ et Δ' sur le plan P.

La première et la deuxième partie du problème sont donc résolues; il nous reste à résoudre la troisième.

Les plans menés par les points D et D' et respectivement perpendiculaires aux droites Δ et Δ' sont perpendiculaires au plan P; leur intersection engendre donc un cylindre perpendiculaire à ce plan, et il reste à en trouver la trace. Cette trace se compose de deux cercles.

En effet, soient $\mathrm{O}d$ et $\mathrm{O}d'$ les projections des droites Δ et Δ' sur le plan P, dd' la projection de DD'. Si dl et $d'l$ sont les perpendiculaires en d et d' aux droites $\mathrm{O}d$ et $\mathrm{O}d'$, l sera le point du lieu qui correspond à la position DD' de la droite mobile. Mais les quatre points $\mathrm{O}dld'$ sont sur un cercle de rayon constant dont $\mathrm{O}l$ est le diamètre; le point l est par conséquent à une distance constante du point O.

Note — Une autre solution nous a été adressée par M. H. V.