H. FAURE

Théorèmes de géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 11 (1872), p. 444-450

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__444_0>

THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. H. FAURE,
Chef d'escadrons d'Artillerie.

1. *Définitions.* — Deux droites A, B et un point f étant donnés, abaissons de ce point des perpendiculaires sur les deux droites, et soient a, b les points où chacune de ces perpendiculaires rencontre l'autre droite. Le cercle décrit sur ab comme diamètre sera appelé le cercle *adjoint* au système des droites A et B par rapport au point f.

Deux plans A, B et un point f étant donnés, abaissons de ce point des perpendiculaires sur les deux plans, et soient a, b les points où chacune de ces perpendiculaires rencontre l'autre plan. La sphère décrite sur ab comme diamètre sera appelée la sphère *adjointe* au système des plans A et B par rapport au point f.

Trois points a, b, f et une droite F étant donnés, joignons le point f aux points a et b; menons par le point f des droites perpendiculaires aux droites fa, fb, ainsi que les droites qui passent par les points a et b et les traces de ces perpendiculaires sur la droite F. Les pieds des perpendiculaires abaissées du point f sur ces quatre droites déterminent un cercle qui sera appelé le cercle *adjoint* au système des points a et b par rapport au point f et à la droite F.

Trois points a, b, f et un plan F étant donnés, joignons le point f aux points a et b; menons par le point f des plans perpendiculaires aux droites fa, fb, ainsi que les plans qui passent par les points a et b et les traces des plans perpendiculaires sur le plan F. Les pieds des perpendiculaires abaissées du point f sur ces quatre plans déterminent une sphère qui sera appelée la sphère *adjointe* au système des points a et b par rapport au point f et au plan F.

Remarque. — Lorsque la droite F est à l'infini, le cercle adjoint au système des points a et b se confond avec le cercle décrit sur ab comme diamètre.

Lorsque le plan F est à l'infini, la sphère adjointe au système des points a et b se confond avec la sphère décrite sur ab comme diamètre.

2. Si par un point m on mène une transversale arbitraire rencontrant une conique ou une surface du second degré aux points a et b, le rapport du produit $ma.mb$ au carré du demi-diamètre parallèle à la transversale sera l'indice du point m par rapport à la conique ou par rapport à la surface.

3. Deux triangles abc, $a'b'c'$ étant polaires réciproques par rapport à une conique, si le point a a pour polaire la droite $b'c'$ opposée au sommet a', nous dirons que les points a, a' sont correspondants. Les côtés A, A', respectivement opposés aux sommets a et a', sont aussi correspondants.

Deux tétraèdres $abcd$, $a'b'c'd'$ étant polaires réciproques par rapport à une surface du second degré, si le point a a pour plan polaire la face $b'c'd'$ opposée au sommet a', nous dirons que les points a, a' sont correspondants. Les faces A, A' respectivement opposées aux sommets a et a' sont aussi correspondantes.

4. *Théorème général.* — Deux triangles abc, $a'b'c'$ sont polaires réciproques par rapport à une conique qui a pour centre le point o :

1° On construit, par rapport à un point quelconque f et à sa polaire F, les cercles adjoints aux systèmes de points correspondants aa', bb', cc' et le cercle orthogonal à ces trois cercles; si l'on désigne par α et β les demi-axes principaux de la conique, par g le pied de la perpendiculaire abaissée du point f sur sa polaire F, on a

$$\alpha^2 + \beta^2 = \overline{of}^2 - \frac{\overline{fg}^2}{I_f}\frac{\pi_f}{\pi_g},$$

π_f, π_g étant les puissances des points f et g par rapport au cercle orthogonal, I_f l'indice du point f par rapport à la conique;

2° Construisons, par rapport au point f, les cercles adjoints aux systèmes des droites correspondantes AA′, BB′, CC′ et le cercle orthogonal à ces trois cercles, on a

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{I_f}{\overline{fg}^2}\left(1 - \frac{\pi_g}{\pi_f}\right),$$

π_f, π_g étant les puissances des points f et g par rapport à ce nouveau cercle orthogonal;

3° Si l'on désigne par S et S′ les aires des triangles abc, $a'b'c'$, on a

$$\alpha^2\beta^2 I_f^3 = -4\,SS'\frac{(f, A)(f, B)(f, C)}{(a, A)(b, B)(c, C)}\frac{(f, F)^3}{(a', F)(b', F)(c', F)},$$

en désignant, comme on le fait généralement, par (f, A), (f, B),... les distances du point f aux droites A, B,....

Ce théorème contient un grand nombre de cas particuliers, à cause de l'indétermination du point f et des deux triangles polaires.

Si le point f coïncide avec le centre o de la conique, sa polaire F est à l'infini et l'on a

$$of = 0, \quad I_f = -1, \quad \frac{\pi_g}{\overline{fg}^2} = 1,$$

d'où ce théorème :

Théorème. — Deux triangles abc, $a'b'c'$ sont polaires réciproques par rapport à une conique qui a pour centre le point o :

1° Sur les segments correspondants aa', bb', cc' pris pour diamètres, on décrit des cercles, ainsi que le cercle orthogonal à ces trois cercles; la somme des carrés des demi-axes principaux de la conique est égale à la puissance de son centre o par rapport à ce dernier cercle;

2° Construisons, par rapport au centre o, les cercles adjoints aux systèmes de droites correspondantes AA′, BB′, CC′ et le cercle orthogonal à ces trois cercles; la somme des carrés des valeurs inverses des demi-axes de la conique est égale à l'inverse de la puissance de son centre o par rapport au cercle orthogonal;

3° Le produit des carrés des demi-axes de la conique est égal à quatre fois le produit des aires des triangles polaires, multiplié par le produit des distances du centre de la conique aux côtés de l'un des triangles divisé par le produit des trois hauteurs de ce même triangle.

Lorsque les triangles polaires abc, $a'b'c'$ coïncident, c'est-à-dire lorsque l'un d'eux abc est conjugué à la conique, le théorème général existe toujours, mais les cercles adjoints qui figurent dans ce théorème se réduisent à des points, et le cercle orthogonal devient le cercle qui passe par ces points. Si en particulier le point f coïncide avec le centre o de la conique, on voit que :

Théorème. — Un triangle abc étant conjugué à une conique :

1° La somme des carrés de ses demi-axes principaux est égale à la puissance de son centre par rapport au cercle circonscrit au triangle;

2° Si l'on fait passer un cercle par les pieds des perpendiculaires abaissées du centre de la conique sur les côtés du triangle abc, la somme des carrés des valeurs inverses des demi-axes de la conique est égale à l'inverse de la puissance de son centre par rapport à ce cercle;

3° Le produit des carrés des demi-axes principaux de la conique est égal à quatre fois le produit des aires des triangles qui ont pour sommet commun le centre de la conique et ceux du triangle donné, divisé par l'aire de ce triangle.

Nota. — Les aires des triangles qui ont pour sommet commun le centre de la conique doivent être pris avec des signes tels, que leur somme donne l'aire du triangle *abc*.

5. La Géométrie dans l'espace donne lieu à des théorèmes analogues aux précédents.

Théorème général. — Deux tétraèdres *abcd*, *a'b'c'd'* sont polaires réciproques par rapport à une surface du second degré qui a pour centre le point *o* :

1° On construit, par rapport à un point quelconque *f* et à son plan polaire F, les sphères adjointes aux systèmes de points correspondants *aa'*, *bb'*, *cc'*, *dd'* et la sphère orthogonale à ces quatre sphères; si l'on désigne par α, β, γ les demi-axes principaux de la surface, par *g* le pied de la perpendiculaire abaissée du point *f* sur son plan polaire F, on a

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \overline{of}^2 - \frac{\overline{fg}^2}{I_f}\frac{\pi_f}{\pi_g},$$

π_f, π_g étant les puissances des points *f* et *g* par rapport à la sphère orthogonale, I_f l'indice du point *f* par rapport à la surface;

2° Construisons, par rapport au point *f*, les sphères adjointes aux systèmes de plans correspondants AA', BB', CC', DD' et la sphère orthogonale à ces sphères, on a

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = \frac{I_f}{\overline{fg}^2}\left(1 - \frac{\pi_g}{\pi_f}\right),$$

π_f, π_g étant les puissances des points f et g par rapport à cette nouvelle sphère orthogonale;

3° Si l'on désigne par V et V' les volumes des tétraèdres polaires *abc*, *a'b'c'*, on a

$$\alpha^2\beta^2\gamma^2 I_f^4 = 36\,VV' \frac{(f,A)(f,B)(f,C)(f,D)}{(a,A)(b,B)(c,C)(d,D)} \frac{(f,F)^4}{(a',F)(b',F)(c',F)(d',F)}.$$

Si le point f coïncide avec le centre o de la surface :

Théorème. — Deux tétraèdres *abcd*, *a'b'c'd'* sont polaires réciproques par rapport à une surface du second degré qui a pour centre le point o :

1° Sur les segments correspondants *aa'*, *bb'*, *cc'*, *dd'* pris pour diamètres, on décrit des sphères, ainsi que la sphère orthogonale à ces quatre sphères; la somme des carrés des demi-axes principaux de la surface est égale à la puissance de son centre par rapport à cette sphère;

2° Construisons, par rapport au centre o, les sphères adjointes aux systèmes de plans correspondants AA', BB', CC', DD' et la sphère orthogonale à ces quatre sphères; la somme des carrés des valeurs inverses des demi-axes de la surface est égale à l'inverse de la puissance de son centre o par rapport à la sphère orthogonale;

3° Le produit des carrés des demi-axes de la surface est égal à trente-six fois le produit des volumes des tétraèdres polaires, multiplié par le produit des distances du centre de la surface aux faces de l'un des tétraèdres, divisé par le produit des hauteurs de ce même tétraèdre.

Lorsque les tétraèdres *abcd*, *a'b'c'd'* coïncident, c'est-à-dire lorsque l'un d'eux *abcd* est conjugué à la surface, le théorème général existe toujours, mais les sphères adjointes qui figurent dans ce théorème se réduisent à des points et la sphère orthogonale devient la sphère qui passe par ces points. Si en particulier le point f coïncide avec le centre o de la surface, on voit que :

Théorème. — Un tétraèdre *abcd* étant conjugué à une surface du second degré :

1° La somme des carrés de ses demi-axes principaux est égale à la puissance de son centre par rapport à la sphère circonscrite au tétraèdre ;

2° Si l'on fait passer une sphère par les pieds des perpendiculaires abaissées du centre de la surface sur les faces du tétraèdre *abcd*, la somme des carrés des valeurs inverses des demi-axes de la surface est égale à l'inverse de la puissance de son centre par rapport à cette sphère ;

3° Le produit des carrés des demi-axes principaux de la surface est égal à trente-six fois le produit des volumes des quatre tétraèdres qui ont pour sommet commun le centre de la surface et ceux du tétraèdre donné, divisé par le carré du volume de ce tétraèdre.

Nota. — Les volumes des tétraèdres qui ont pour sommet commun le centre de la surface doivent être pris avec des signes tels, que leur somme donne le volume du tétraèdre *abcd* pris avec le signe —.

Remarque. — Je démontre ces théorèmes par la Géométrie à l'aide de la théorie des indices.