Laguerre

Recherches analytiques sur la surface du troisième ordre qui est la réciproque de la surface de Steiner

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 11 (1872), p. 418-428
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__418_1>

RECHERCHES ANALYTIQUES

sur la surface du troisième ordre qui est la réciproque de la surface de Steiner

(suite, voir même tome, p. 337);

PAR M. LAGUERRE.

---

18. Je ferai encore quelques remarques sur les propositions précédentes.

Par tout point M, pris sur la surface $\mathcal{K}$, passent deux cubiques appartenant à l'asymptotique Z; ces deux courbes définissent parfaitement le point M, dont on peut ainsi fixer la position sur la surface par les valeurs des paramètres t et t' des points de Z qui sont les sommets des cônes touchant la surface suivant les cubiques considérées.

En un point (t, t') de $\mathcal{X}$, l'équation du plan tangent est

$$\mathcal{E}_0 = t'^2(at^2 + 2bt\tau + c\tau^2) + 2t'\tau'(bt^2 + 2ct\tau + d\tau^2) + \tau'^2(ct^2 + 2dt\tau + e\tau^2) = 0;$$

on voit ici apparaître l'émanant principal de u; les deux autres émanants

$$\mathcal{E}' = t'(at^3 + 3bt^2\tau + 3ct\tau^2 + d\tau^3) + \tau'(bt^3 + 3ct^2\tau + 3dt\tau^2 + e\tau^3)$$

et

$$\mathcal{E} = t(at'^3 + 3bt'^2\tau' - 3ct'\tau'^2 + d\tau'^3) + \tau(bt'^3 + 3ct'^2\tau' + 3dt'\tau'^2 + e\tau^3)$$

représentent, comme nous l'avons vu, les plans passant par le point (t, t') et les tangentes (t) et (t'), ou encore les plans osculateurs des cubiques, appartenant à l'asymptotique Z, qui se croisent au plan considéré.

Le plan tangent au point (t, t') passe évidemment par les deux points (t) et (t').

Il serait facile d'exprimer en fonction des paramètres t et t' les coordonnées du point (t, t'); mais je laisse de côté cette recherche, qui me serait inutile en ce moment.

III. — *Sur les lignes nodales des surfaces développables dont les asymptotiques sont les arêtes de rebroussement* (*).

19. La surface développable $\mathcal{D}$, dont la sextique Z est l'arête de rebroussement, a pour ligne nodale une quartique $\mathcal{M}$ dont il est facile d'obtenir les équations.

(*) On sait (*voir* Cayley, *loc. cit.*) que ces lignes nodales sont des courbes du quatrième ordre et de seconde espèce (c'est-à-dire par lesquelles on ne peut faire passer qu'une seule surface du second ordre);

Pour tout point de cette courbe, l'équation

$$u = 0$$

a deux couples de racines égales; elle est donc définie par le système d'équations

$$\frac{ac - b^2}{a} = \frac{ad - bc}{2b} = \frac{ae + 2bd - 3c^2}{6c} = \frac{be - cd}{2d} = \frac{ce - d^2}{e},$$

d'où l'on déduit, en vertu de l'identité

$$a\varepsilon - 4b\delta + 6c\gamma - 4d\beta + e\alpha = 0,$$

$$\begin{aligned}\varepsilon(ac - b^2) - 2\delta(ad - bc) + \gamma(ae + 2bd - 3c^2)\\ - 2\beta(be - cd) + \alpha(ce + d^2) = 0.\end{aligned}$$

Telle est l'équation de la quadrique $\mathfrak{Q}$, qui contient la ligne nodale; en conservant les notations du § I, on voit que cette équation est

$$h = 0.$$

---

dans tout ce qui suit, je les appellerai, pour abréger, simplement *quartiques,* en réservant le nom de *biquadratiques* aux courbes du quatrième ordre qui résultent de l'intersection de deux surfaces du second ordre. J'appellerai de même *sextiques* les courbes du sixième ordre et de quatrième classe qui sont les asymptotiques de la surface réciproque de la surface de Steiner. Les sextiques sont les réciproques des surfaces développables qui ont des quartiques pour arêtes de rebroussement.

Les paragraphes qui suivent peuvent être considérés comme un chapitre partiel de la théorie des quartiques et des sextiques.

A ce sujet, il ne sera peut-être pas inutile d'indiquer le sens géométrique des deux équations

$$i = 0 \quad \text{et} \quad j = 0.$$

Relativement à la surface de Steiner, elles donnent lieu aux deux propositions suivantes :

I. *Étant donnée une quartique, l'enveloppe des plans qui coupent cette courbe en quatre points équiharmoniques est la surface du second ordre que l'on peut mener par la quartique.*

II. *Étant donnée une quartique, l'enveloppe des plans qui coupent cette courbe en quatre points harmoniques est la surface de Steiner dont cette quartique est une asymptotique.*

D'après le tableau A, l'équation générale des quadriques $\mathfrak{Q}_\rho$, contenant les nodales relatives aux diverses asymptotiques de la surface, sera donc

$$\mu\theta i + (\lambda\theta + \rho\mu) h + \lambda\rho k = 0,$$

le rapport $\mu:\lambda$ étant lié au rapport $\rho:\theta$ par la relation

$$\frac{\mu}{\lambda} = \frac{2\rho(3j_0\rho - i_0\theta)}{i_0\rho^2 - 3\theta^2}.$$

Toutes ces quadriques, ainsi que les quadriques S_ρ, sont comprises dans le réseau (i, h, k).

20. On peut, par une quartique donnée $\mathfrak{N}$, faire passer une infinité de surfaces réglées du troisième ordre. Prenons, en effet, arbitrairement une corde de cette courbe, c'est-à-dire une droite s'appuyant sur elle en deux points; tout plan passant par cette corde fixe rencontre de nouveau la courbe en deux points. Le lieu des cordes mobiles qui les joignent est évidemment une surface réglée du troisième ordre ayant la corde fixe pour ligne double.

Il est facile d'obtenir l'équation de cette surface.

A cet effet, je considérerai le covariant du sixième degré de u

$$L = (a^2 d + 3b^3 - 3abc)t^6 + \ldots$$

(on sait que tous ses coefficients s'annulent pour les points de la ligne nodale) et l'émanant principal de L

$$L_0 = t'^3 \frac{d^3 L}{dt^3} + 3t'^2\tau' \frac{d^3 L}{dt^2 d\tau} + 3t'\tau'^2 \frac{d^3 L}{dt\, d\tau^2} + \tau'^3 \frac{d^3 L}{d\tau^3};$$

l'équation

$$L_0 = 0$$

représente une surface du troisième ordre qui contient la quartique $\mathfrak{N}$; il est facile de voir que cette surface est réglée.

On a, en effet, en conservant les notations précédentes et en posant, pour abréger,

$$u' = at'^4 + 4bt'^3\tau' + 6ct'^2\tau'^2 + 4dt'\tau'^3 + e\tau t',$$

l'identité suivante

$$u\mathcal{E}^2 - u'\mathcal{E}'^2 = (t\tau' - t'\tau)^2 \mathrm{L}_0 \ (*);$$

d'où l'on voit que l'équation de la surface peut se mettre sous la forme

$$u\mathcal{E}^2 - u'\mathcal{E}'^2 = 0,$$

équation d'une surface réglée dont les diverses génératrices sont données par le système simultané d'équations

$$u = \lambda^2 u' \quad \text{et} \quad \mathcal{E}' = \lambda\mathcal{E},$$

où λ désigne un paramètre arbitraire.

(*) Sur cette identité, voir (*Bulletin de la Société Philomathique* et journal *l'Institut*, mars 1872), ma *Note sur les covariants doubles des formes binaires*.

La proposition fondamentale relative aux covariants doubles peut s'enoncer ainsi :

Etant donne un système quelconque S de formes binaires, tout covariant double de ce systeme peut se mettre sous la forme

$$(A) + (B)\omega + (C)\omega + \ldots;$$

(A), (B),... designant des emanants des formes A, B, et ces formes etant elles-memes des covariants du système S; ω represente le covariant double general

$$xy' - yx'.$$

Depuis la publication de la Note dont je viens de parler, j'ai reconnu que M. Clebsch s'etait appuye sur la même proposition dans son ouvrage sur les formes binaires; je crois toutefois pouvoir faire remarquer à ce sujet que, des 1860, je l'avais communiquee à M. Hermite en lui faisant connaître les premiers principes d'une nouvelle theorie des formes binaires qui est restee inedite.

21. Les équations de la droite double de cette surface sont

$$\mathcal{E} = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}' = 0,$$

et telle est l'équation générale (renfermant deux paramètres arbitraires t et t') des cordes de la quartique.

La seconde directrice rectiligne de cette surface a pour équations

$$u = 0 \quad \text{et} \quad u' = 0.$$

Si l'on convient d'appeler *droite appartenant à une développable* les droites qui résultent de l'intersection de deux plans tangents à cette développable, on peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème V. — *Étant donnée une quartique quelconque, cette courbe est la ligne nodale d'une surface développable du sixième ordre et de la quatrième classe; par toute droite appartenant à cette surface développable et la quartique, on peut faire passer une surface réglée du troisième ordre.*

22. L'équation générale des surfaces réglées du troisième ordre passant par la quartique $\mathfrak{M}$ peut se mettre encore sous une autre forme remarquable, et qui résulte de l'identité

$$(t\tau' - t'\tau)\mathrm{L}_0 = u\mathrm{H}' - u'\mathrm{H};$$

d'où l'équation

$$u\mathrm{H}' - u'\mathrm{H} = 0$$

et la conséquence suivante :

La courbe d'intersection de deux cônes quelconques appartenant à l'asymptotique Z *et la quartique* $\mathfrak{M}$ *sont situées sur une même surface réglée du troisième ordre.*

Cette même surface réglée contient aussi la courbe du dixième ordre qui est l'intersection (partielle) des surfaces développables dont les arêtes sont les deux cubiques suivant lesquelles la surface $\mathfrak{H}$ est touchée par les deux cônes dont je viens de parler.

Ces deux surfaces (*voir* n° 12) ont, en effet, pour équations

$$ju - i\mathrm{H} = 0 \quad \text{et} \quad ju' - i\mathrm{H}' = 0;$$

en éliminant j et u, on obtient l'équation précédente, ce qui démontre la proposition énoncée.

23. Lorsque l'on fait

$$t' = t,$$

les deux directrices rectilignes des surfaces du troisième ordre se confondent, et l'on obtient les variétés singulières signalées par M. Cayley (*voir* Salmon : *Analytic Geometry of three dimensions*, § 447).

L'équation de ces surfaces est $\mathrm{L} = 0$.

24. Par la sextique Z et la quartique $\mathfrak{N}$, on peut faire passer une infinité de surfaces du quatrième ordre dont l'équation est

$$3ju - 2i\mathrm{H} = 0.$$

Je ferai remarquer encore, et je reviendrai plus tard sur ce sujet, que la ligne nodale $\mathfrak{N}$ est située sur la surface de Steiner $\mathfrak{S}$, qui est la polaire réciproque de $\mathfrak{H}$ par rapport à la quadrique $\mathfrak{s}$.

IV. — *Sur les polygones que l'on peut circonscrire à une sextique gauche.*

25. Soit une sextique gauche Z, définie comme l'arête de rebroussement de la surface enveloppée par le plan variable

$$u = at^4 + 4bt^3\tau + 6ct^2\tau^2 + 4dt\tau^3 + e\tau^4 = 0.$$

Supposons que les tangentes, en deux points (t) et (t') de cette courbe, se rencontrent en un point M (qui appartient nécessairement à la nodale $\mathfrak{N}$).

Les équations de ces tangentes sont

$$\begin{aligned}
&at^3 + 3bt^2\tau + 3ct\tau^2 + e\tau^3 = 0,\\
&bt^3 + 3ct^2\tau + 3dt\tau^2 + e\tau^3 = 0,\\
&at'^3 + 3bt'^2\tau' + 3ct'\tau'^2 + d\tau'^3 = 0,\\
&bt'^3 + 3ct'^2\tau' + 3dt'\tau'^2 + c\tau'^3 = 0.
\end{aligned}$$

Ces quatre équations et l'équation identique

$$a\varepsilon - 4b\beta + 6c\gamma - 4d\delta + e\alpha = 0$$

devant être satisfaites pour les coordonnées du point M, on obtiendra la relation qui lie entre eux les paramètres t et t', en égalant à zéro le déterminant de ce système d'équations.

La valeur de ce déterminant peut s'obtenir immédiatement en remarquant que c'est un covariant double de ω, du premier degré par rapport aux coefficients de ce polynôme, et du sixième degré par rapport aux variables t, τ et aux variables t, τ'; en se reportant à la note qui précède le paragraphe précédent, on voit immédiatement que ce déterminant a pour valenr

$$(t\tau' - t'\tau)^4 \mathcal{F}_0,$$

$\mathcal{F}_0$ désignant l'émanant principal de ω

$$t'^2(\alpha t^2 + 2\beta t\tau + \gamma\tau^2) + 2t'\tau'(\beta t^2 + 2\gamma t\tau + \delta\tau^2) \\ + \tau'^2(\gamma t^2 + 2\delta t\tau + \varepsilon\tau'^2);$$

en sorte que la relation qui existe entre les paramètres t et t' est

$$\mathcal{F}_0 = 0.$$

Les coordonnées du point M s'expriment facilement en fonction des paramètres t et t', et sont données par le système d'équations

$$\frac{a}{1} = \frac{2b}{-(t+t')} = \frac{6c}{t^2+4tt'+t'^2} = \frac{2d}{-tt'(t+t')} = \frac{e}{t^2t'^2}\ (*).$$

26. L'équation

$$\mathcal{F}_0 = 0$$

donne lieu à une remarque importante.

C'est l'intégrale de l'équation d'Euler qui sert de base à la théorie des fonctions elliptiques.

D'où la proposition suivante :

Théorème VI. — *Si l'on peut circonscrire un polygone gauche à une sextique, on peut lui circonscrire une infinité de polygones du même nombre de côtés.*

Remarque. — Il est clair que, pendant que les côtés du polygone roulent sur la sextique, ses sommets décrivent la quartique $\mathfrak{M}$.

On a ainsi un polygone mobile dont les sommets se meuvent sur une quadrique, tandis que ses côtés enveloppent une courbe tracée sur une autre quadrique ; c'est un point particulier d'une question digne, je crois, d'intérêt, et sur laquelle je reviendrai. Je me suis déjà occupé du problème général dans une communication faite à la Société Philomathique, en m'appuyant sur l'extension à l'espace de la théorie de Jacobi relative aux courbes planes du second ordre, extension que j'ai fait connaître dans une Note présentée à l'Institut sur l'*Intégration d'une certaine classe d'équations différentielles.*

27. En particulier, si l'on peut circonscrire un triangle

(*) Ici, pour simplifier l'écriture, j'ai fait, comme je le ferai souvent dans la suite, $\tau = \tau' = 1$.

à une sextique Z, on peut en circonscrire une infinité; en d'autres termes, si l'on peut mener un plan tritangent à la sextique, on peut lui en mener une infinité.

Si l'on se reporte à la relation

$$\mathfrak{F}_0 = 0,$$

on verra facilement que ce cas se présente quand l'on a

$$i_0 = 0.$$

Comme l'a remarqué M. Cremona (*), cette relation signifie que les quatre points cuspidaux de Z sont en rapport équiharmonique.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Quand les quatre points cuspidaux d'une sextique sont en rapport équiharmonique, on peut mener à cette courbe une infinité de plans tritangents.

Je montrerai plus loin que, dans ce cas, la sextique est située sur un cône du second degré.

28. La considération de l'équation $\mathfrak{F}_0 = 0$ montre aussi facilement que la condition, pour que l'on puisse circonscrire à la sextique Z un quadrilatère, est

$$j_0 = 0.$$

D'où, en se reportant aux observations déjà citées de M. Cremona, la proposition suivante :

Quand les quatre points cuspidaux d'une sextique sont en rapport harmonique, on peut lui circonscrire une infinité de quadrilatères gauches.

M. Cayley a remarqué (**) que, quand l'on a $j_0 = 0$, la sextique est l'arête de rebroussement d'une surface

(*) *Voir* les Notes de M. Cayley *sur les torses sextiques* dejà citées.

(**) *Notes sur les torses sextiques* dejà citées.

développable circonscrite à deux quadriques se touchant d'un contact simple.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Quand deux quadriques ont entre elles un contact simple, on peut circonscrire une infinité de quadrilatères gauches à l'arête de rebroussement de la surface développable circonscrite à ces deux quadriques.

(*La suite prochainement.*)