Nouvelles annales de mathématiques

Maleyx

Séparation des racines des équations à une inconnue

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 11 (1872), p. 404-418

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__404_1>

SÉPARATION DES RACINES DES ÉQUATIONS A UNE INCONNUE;

PAR M. MALEYX.

I. THÉORÈME. *Soient :* $F(x) = 0$ *une équation à une inconnue, dont le premier membre est une fonction continue de la variable, et dont la dérivée* $F'(x)$ *est aussi continue;* $\varphi(x)$ *une fonction quelconque de la même variable qui reste finie et continue pour toute valeur finie de la variable;* $f(x)$ *une troisième fonction arbitraire de la même variable qui ne puisse changer de signe qu'en passant par zéro ou par l'infini, et qui ne puisse le faire pour une valeur de* x *satisfaisant à l'équation* $F(x) = 0$ *; les racines de l'équation* $F(x) = 0$ *sont séparées par les racines réelles de l'équation*

$$(1) \qquad \varphi(x) F(x) - f(x) F'(x) = 0,$$

jointes aux nombres qui peuvent rendre $f(x)$ *nulle ou* *infinie, tous ces nombres ayant été rangés par ordre de grandeur.*

Pour démontrer ce théorème, il suffit de faire voir que si α, β sont deux racines réelles consécutives de l'équation $F(x) = 0$, ne comprenant aucune valeur de x pour laquelle $f(x)$ change de signe, il existe entre elles au moins une racine réelle de l'équation (1).

Or, d'après les hypothèses précédentes, $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ sont deux nombres finis de mêmes signes, et il en est de même de $f(\alpha + h)$ et de $f(\beta - h)$, h étant positif et moindre que $\beta - \alpha$; de plus, l'équation (1) pouvant se mettre sous la forme

$$F(x)\left[\varphi(x) - f(x)\frac{F'(x)}{F(x)}\right] = 0,$$

si l'on substitue dans son premier membre les nombres $\alpha + h$, $\beta - h$, h étant positif et suffisamment petit, les deux substitutions feront prendre au quotient $\frac{F'(x)}{F(x)}$ des valeurs numériques aussi grandes qu'on le voudra, la première positive et la seconde négative. La première substitution fera donc prendre au premier membre de l'équation (1) le signe de $-f(\alpha + h)F(\alpha + h)$, et la seconde le signe contraire de $f(\beta - h)F(\beta - h)$, puisque $\varphi(x)$ reste finie; donc il existe au moins une racine de l'équation (1) entre α et β.

II. On déduit de là un moyen de séparer les racines des équations algébriques, que nous allons examiner successivement à partir du troisième degré. Divisons le premier membre de l'équation générale du troisième degré

$$x^3 + 3px^2 + 3qx + r = 0$$

par son polynôme dérivé, nous obtiendrons un quotient et un reste, tous les deux du premier degré, et nous pourrons écrire l'égalité

$$(\alpha)\quad \begin{cases} x^3 + 3px^2 + 3qx + r - (x^2 + 2px + q)(x + p) \\ \quad = 2(q - p^2)x + r - pq. \end{cases}$$

D'après le théorème précédent, les racines de l'équation

$$x^3 + 3px^2 + 3qx + r = 0$$

sont séparées par les deux racines commensurables des deux équations du premier degré

$$(\beta)\qquad x + p = 0,$$

$$(\gamma)\qquad 2(q - p^2)x + r - pq = 0.$$

On peut tirer de là la condition de réalité des racines de l'équation. Pour plus de commodité, décomposons le polynôme dérivé en somme de carrés, l'égalité (α) peut se mettre sous la forme

$$(\delta)\quad \begin{cases} x^3 + 3px^2 + 3qx + r = [(x + p)^2 - (p^2 - q)](x + p) \\ \qquad\qquad + 2(q - p^2)x + r - pq. \end{cases}$$

La substitution d'un nombre quelconque dans les deux membres de l'égalité (δ) donnant des résultats identiques, nous ferons nos substitutions dans le second membre.

Deux cas doivent être distingués, suivant que la racine de l'équation (γ) est plus grande ou plus petite que celle de l'équation (β).

Première hypothèse :

$$\frac{r - pq}{2(p^2 - q)} > -p.$$

Pour que les trois racines soient réelles, dans ce cas, il faut et il suffit que la substitution de $\frac{r - pq}{2(p^2 - q)}$ fasse prendre au premier membre de l'équation le signe —, et que la substitution de $-p$ lui fasse prendre le signe +; les conditions de réalité sont donc

$$(1) \quad \left\{\left[\frac{r-pq}{2(p^2-q)}+p\right]^2-(p^2-q)\right\}\left[\frac{r-pq}{2(p^2-q)}+p\right]<0,$$

$$(2) \qquad 2(p^2-q)p+r-pq>0.$$

Or, d'après l'hypothèse, il suffit que le premier facteur de l'inégalité (1) soit négatif, pour que les inégalités (1) et (2) soient satisfaites; car, s'il en est ainsi, le premier membre de l'inégalité (1), produit de deux nombres de signes contraires, est négatif, et comme, forcément, p^2-q est positif, l'inégalité (2) devient conséquence de l'hypothèse par des opérations permises. Donc la seule condition nécessaire et suffisante dans ce cas est

$$\left[\frac{r-pq}{2(p^2-q)}+p\right]^2-(p^2-q)<0.$$

Seconde hypothèse :

$$\frac{r-pq}{2(p^2-q)}<-p.$$

On verrait de même que, dans ce cas, les conditions de réalité sont

$$(3) \quad \left\{\left[\frac{r-pq}{2(p^2-q)}+p\right]^2-(p^2-q)\right\}\left[\frac{r-pq}{2(p^2-q)}+p\right]>0,$$

$$(4) \qquad 2(p^2-q)p+r-pq<0.$$

En raisonnant comme on l'a fait dans la première hypothèse, on reconnaîtrait qu'il suffit encore, dans ce second cas, que le premier facteur de l'inégalité (3) soit négatif, pour que les inégalités (3) et (4) soient satisfaites.

Donc, dans tous les cas, la condition unique, nécessaire et suffisante pour que les trois racines de l'équation

$$x^3 + 3px^2 + 3qx + r = 0$$

soient réelles, est exprimée par l'inégalité

$$\left[\frac{r - pq}{2(p^2 - q)} + p\right]^2 - (p^2 - q) < 0,$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$(r - 3pq + 2p^3)^2 - 4(p^2 - q)^3 < 0.$$

III. Prenons, en deuxième lieu, l'équation complète du quatrième degré

$$x^4 + 4px^3 + 6qx^2 + 4rx + s = 0.$$

Divisons encore le premier membre par son polynôme dérivé, nous aurons un quotient du premier degré et un reste du second, et nous pourrons écrire l'égalité

$$\begin{aligned} x^4 + 4px^3 + 6qx^2 + 4rx + s = {} & (x^3 + 3px^2 + 3qx + r)(x + p) \\ & + 3(q - p^2)x^2 + 3(r - pq)x \\ & + s - pr. \end{aligned}$$

L'application de notre théorème établit que les racines de l'équation du quatrième degré sont séparées par la racine commensurable de l'équation du premier degré

$$x + p = 0,$$

et par les deux racines de l'équation du second degré

$$3(q - p^2)x^2 + 3(r - pq)x + s - pr = 0,$$

supposées réelles.

La substitution de ces trois nombres, rangés par ordre de grandeur, dans le polynôme premier membre de l'équation du quatrième degré, conduit donc à la séparation des racines. On peut éviter la substitution des deux racines de l'équation du second degré, qui peuvent être incommensurables, au moyen d'une nouvelle division. Posons, pour abréger l'écriture,

$$3(q-p^2)=a,$$
$$3(r-pq)=b,$$
$$s-pr=c;$$

divisons le premier diviseur

$$x^3+3px^2+3qx+r$$

par le reste

$$ax^2+bx+c,$$

nous obtiendrons un quotient du premier degré que nous représenterons par Q, et un reste du premier degré que nous représenterons aussi par $\alpha x+\beta$. D'après ces conventions, on a

$$x^3+3px^2+3qx+r=(ax^2+bx+c)\,Q+\alpha x+\beta,$$

et l'égalité résultant de notre première division peut se mettre sous la forme

$$x^4+4px^3+6qx^2+4rx+s=(ax^2+bx+c)[(x+p)Q+1]$$
$$+(x+p)(\alpha x+\beta).$$

Il nous suffit, pour effectuer la séparation, de connaître les signes pris par le second membre de la dernière égalité, quand on y remplace la variable x par l'une des racines de l'équation

$$ax^2+bx+c=0,$$

supposées réelles, ou par la racine de l'équation

$$x+p=0.$$

La connaissance de ces signes est facilement acquise par celle de l'ordre de grandeur des racines des trois équations

$$ax^2 + bx + c = 0,$$
$$x + p = 0,$$
$$\alpha x + \beta = 0;$$

et cet ordre de grandeur est déterminé, soit par la substitution, dans le premier membre de la première, des racines des deux dernières, soit par la comparaison de ces racines avec la demi-somme des racines de la première.

IV. Considérons, comme dernier exemple particulier, l'équation complète du cinquième degré représentée par

$$F(x) = 0.$$

Multiplions son premier membre par le binôme $x - \alpha$, dont nous laissons momentanément le second terme indéterminé, et divisons le produit, qui est du sixième degré, par la dérivée du polynôme $F(x)$ qui est du quatrième. Nous obtiendrons un quotient du second degré, et un reste du troisième. On doit remarquer que le coefficient indéterminé α, ne figurant qu'au premier degré dans les coefficients du dividende, et n'entrant pas dans ceux du diviseur, les coefficients du quotient et du reste ne peuvent le contenir qu'au premier degré; on pourra donc en disposer de manière à rendre nul le coefficient du terme en x^3 dans le reste. Supposons qu'on ait déterminé α d'après cette condition, et représentons le quotient et le reste respectivement par

$$ax^2 + bx + c, \quad a'x^2 + b'x + c';$$

après avoir remplacé α par sa valeur, on aura l'égalité

$$(x - \alpha)F(x) = F'(x)(ax^2 + bx + c) + a'x^2 + b'x + c'.$$

D'après notre théorème, les racines de l'équation

$F(x) = 0$ seront séparées par les racines réelles des deux équations du second degré

$$ax^2 + bx + c = 0,$$
$$a'x^2 + b'x + c' = 0.$$

Si, par une nouvelle division, on donne à $F'(x)$ la forme

$$F'(x) = (a'x^2 + b'x + c')Q + mx + n,$$

l'égalité résultant de la première division pourra s'écrire

$$(x - \alpha)F(x) = (a'x^2 + b'x + c')[(ax^2 + bx + r)Q + 1]$$
$$+ (mx + n)(ax^2 + bx + c).$$

Il suffira alors de connaître l'ordre de grandeur des racines réelles des équations

$$ax^2 + bx + c = 0,$$
$$a'x^2 + b'x + c' = 0,$$
$$mn + n = 0,$$
$$x - \alpha = 0,$$

pour pouvoir assigner le signe du second membre et celui du facteur $x - \alpha$ qui figure au premier membre, quand on substituera dans les deux membres l'une des racines des deux équations

$$ax^2 + bx + c = 0,$$
$$a'x^2 + b'x + c' = 0.$$

On en conclura le signe de $F(x)$ pour ces valeurs, et la séparation sera effectuée.

Remarque I. — On pourrait craindre que le coefficient de la variable auxiliaire α ne fût nul dans le terme du troisième degré qu'on veut détruire dans le reste, mais on vérifie facilement par le calcul que, s'il en est ainsi, en divisant simplement $F(x)$ par sa dérivée, sans introduire au dividende le facteur $x - \alpha$, le reste se réduit au second degré.

Remarque II. — L'indétermination de la variable auxiliaire α permet de faire disparaître un terme quelconque du reste; et si, par exemple, on trouvait plus convenable de réduire à zéro le terme indépendant du reste du troisième degré, on pourrait séparer les racines de l'équation $F(x) = 0$ au moyen de celles d'une équation du second degré, et de celles d'une équation du troisième degré admettant la racine zéro.

V. Nous allons maintenant établir qu'on peut, par le moyen de notre théorème, ramener la séparation des racines des équations dont le degré ne surpasse pas $2m+1$ à celle des racines d'un système de quatre équations dont les degrés ne surpassent pas m, problème qui doit être considéré comme résolu.

Considérons d'abord l'équation de degré $2m$

$$F(x) = 0.$$

Divisons son premier membre par le polynôme dérivé $F'(x)$, nous aurons un quotient du premier degré que nous représenterons par $ax + b$, et un reste du degré $2m - 2$, représenté par $F_1(x)$. D'après cela on peut écrire l'égalité

$$F(x) = (ax + b)F'(x) + F_1(x).$$

Multiplions $F_1(x)$ par un polynôme du degré $m - 2$ à coefficients indéterminés

$$f(x) = x^{m-2} + px^{m-3} + \ldots + t.$$

Le produit $f(x)F_1(x)$ est du degré $3m - 4$; divisons-le par $F'(x)$ dont le degré est $2m - 1$, le quotient sera du degré $m - 3$, et le reste du degré $2m - 2$. Mais, en disposant convenablement des $m - 2$ coefficients indéterminés de $f(x)$, qui ne figurent qu'au premier degré dans ceux du reste, on pourra faire disparaître les $m - 2$ premiers termes de ce reste, dont le degré sera ainsi réduit à m. Représentons par $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $F_2(x)$ ce que deviennent respectivement $f(x)$, le quotient, et le reste de notre division, quand nous y aurons remplacé les coefficients indéterminés de $f(x)$ par les valeurs que nous venons de définir; nous aurons les deux égalités

$$F(x) = (ax + b)F'(x) + F_1(x),$$
$$\varphi(x)F_1(x) = \psi(x)F'(x) + F_2(x).$$

Multiplions les deux membres de la première par $\varphi(x)$, et ajoutons-les membre à membre en posant

$$(ax + b)\varphi(x) + \psi(x) = F_3(x),$$

nous aurons

$$\varphi(x)F(x) = F_3(x)F'(x) + F_2(x).$$

Les racines de l'équation $F(x) = 0$ sont séparées par celles des deux équations

$$F_2(x) = 0,$$
$$F_3(x) = 0,$$

dont les degrés respectifs sont m et $m - 1$. Cette séparation sera effectuée quand nous connaîtrons les signes que prend $F(x)$ par la substitution à la place de x des racines des deux équations précédentes. Divisons maintenant $F'(x)$ par $F_2(x)$, désignons le quotient par Q et le reste du degré $m - 1$ par $F_4(x)$, nous en conclurons

$$F'(x) = F_2(x)Q + F_4(x),$$
$$\varphi(x)F(x) = F_2(x)[QF_3(x) + 1] + F_3(x)F_4(x).$$

D'après la dernière égalité, il suffit, pour connaître les signes que prend $F(x)$ quand on y substitue les racines des deux équations

$$F_2(x) = 0,$$
$$F_3(x) = 0,$$

de ranger par ordre de grandeur les racines des quatre équations

$$F_2(x) = 0,$$
$$F_3(x) = 0,$$
$$F_4(x) = 0,$$
$$\varphi(x) = 0;$$

ce qui peut toujours être fait, puisqu'on peut séparer les racines de ces équations et en approcher autant que l'on voudra.

En second lieu, si l'équation est du degré $2m + 1$, un raisonnement entièrement analogue conduit aux mêmes conclusions; il n'y a de différence à noter que sur les degrés des polynômes remplaçant $\varphi(x)$ et $F_3(x)$, qui seront respectivement augmentés d'une unité et deviendront $m - 1$ et m.

Remarque I. — De même que dans l'article précédent, il se pourrait que quelques-uns ou même la totalité des coefficients de $f(x)$, dont on veut disposer pour réduire au degré m le reste de la division de $f(x) F_1(x)$ par $F'(x)$, prissent des valeurs infinies. Voyons ce qui se passerait dans ce cas. Observons d'abord que cette circonstance ne peut se présenter qu'en établissant entre les coefficients de $F_1(x)$ des relations particulières, et qu'elle ne peut avoir lieu tant que ces coefficients restent quelconques et indépendants les uns des autres. Considérons un polynôme quelconque du même degré que $F_1(x)$, soit $\chi(x)$; les coefficients de $\chi(x)$ étant absolument arbitraires, on peut en disposer de manière que des valeurs convenables et finies des coefficients de $f(x)$ réduisent au degré m le reste de la division de $f(x)\chi(x)$ par $F'(x)$. Représentons ce reste du degré m par $\chi_1(x)$, nous aurons l'égalité

$$(1) \qquad f(x)\chi(x) = F'(x)\psi_1(x) + \chi_1(x),$$

$\psi_1(x)$ et $\chi_1(x)$ ne renfermant les coefficients de $f(x)$ qu'au premier degré; si nous faisons tendre les coefficients de $\chi(x)$ vers ceux de $F_1(x)$, d'après une loi quelconque, les coefficients de $f(x)$ varieront, et un ou plusieurs d'entre eux croîtront indéfiniment. Soit r celui d'entre eux qui tend vers l'infini de l'ordre le plus élevé; divisons par r les deux membres de l'égalité (1) avant de faire tendre les coefficients de $\chi(x)$ vers ceux de $F_1(x)$, nous aurons

$$(2) \qquad \frac{f(x)}{r}\chi(x) = F'(x)\frac{\psi_1(x)}{r} + \frac{\chi_1(x)}{r}.$$

Si maintenant nous faisons tendre les coefficients de $\chi(x)$ vers ceux de $F_1(x)$, le quotient $\frac{f(x)}{r}$ tendra vers un polynôme de degré inférieur à celui de $f(x)$, mais dont tous les termes ne pourront se réduire à zéro. Les quotients $\frac{\psi_1(x)}{r}$ et $\frac{\chi_1(x)}{r}$ ne peuvent se réduire qu'à des degrés respectivement moindres que ceux de $\psi_1(x)$ et $\chi_1(x)$; donc, dans ce cas, il suffira de multiplier $F_1(x)$ par un polynôme de degré inférieur à $m-2$, pour qu'en divisant le produit par $F'(x)$ on obtienne un reste dont le degré ne surpasse pas m.

On peut observer que, dans ce cas, la somme des degrés des équations dont les racines séparent les racines de la proposée est inférieure de plus d'une unité à celle de cette équation; donc elle a des racines imaginaires.

Remarque II. — Nous croyons avoir établi ainsi d'une manière rigoureuse que la séparation des racines d'une équation dont le degré ne surpasse pas $2m+1$ peut se ramener à la séparation de celles de quatre équations dont les degrés ne surpassent pas m; mais ce n'est peut-être pas le moyen le plus avantageux d'appliquer notre théorème, la généralité de sa forme permet d'en modifier l'usage. Si, par exemple, nous représentons par Q_1 le quotient de la division de $F'(x)$ par $F_1(x)$ et par $f_1(x)$ le reste de cette opération, nous pourrons donner à l'égalité

$$F(x) = (ax+b)F'(x) + F_1(x)$$

la forme

$$F(x) = F_1(x)[(ax+b)Q_1 + 1] + (ax+b)f_1(x);$$

et, en répétant un raisonnement déjà fait, on voit qu'il suffit, pour effectuer la séparation des racines de $F(x)=0$, de ranger par ordre de grandeur les racines réelles des trois équations

$$F_1(x) = 0,$$
$$f_1(x) = 0,$$
$$ax+b = 0.$$

Les degrés des deux premières sont inférieurs de deux ou trois unités à celui de l'équation proposée; celui de la dernière est 1; donc il suffit, pour séparer les racines d'une équation, de savoir séparer celles des équations dont le degré est inférieur d'au moins deux unités. On peut ainsi se dispenser de l'usage des coefficients indéterminés.

VI. Le moyen de séparation que nous venons d'exposer s'applique avec succès à quelques exemples que nous allons successivement examiner.

1° L'équation trinôme

$$x^m + px^n + q = 0.$$

On sait que les racines de cette équation sont séparées par celles de la dérivée, ce qui, du reste, peut se déduire de notre théorème en y faisant $\varphi(x)$ identiquement nulle, et $f(x)$ égale à un; mais on peut aussi poser les égalités

$$\begin{aligned} x^m + px^n + q &= \frac{x}{m}(mx^{m-1} + npx^{n-1}) + \left(1 - \frac{n}{m}\right)px^n + q \\ &= \frac{x}{n}(mx^{m-1} + npx^{n-1}) - \left(\frac{m}{n} - 1\right)x^m + q. \end{aligned}$$

Les racines de l'équation sont donc aussi séparées par le nombre zéro, joint aux racines de l'une des équations binômes

$$\begin{aligned} (m-n)px^n + mq &= 0, \\ (m-n)x^m - nq &= 0. \end{aligned}$$

2° L'équation à quatre termes dans laquelle les exposants de la variable forment une progression arithmétique dans trois des termes, et qui est de l'une des formes

$$\begin{aligned} x^m + ax^{m-r} + bx^{m-2r} + c &= 0, \\ x^n + ax^{2r} + bx^r + c &= 0. \end{aligned}$$

Dans le premier cas, les racines de l'équation dérivée qui peuvent être obtenues séparent les racines de l'équation. Dans le deuxième cas, on a l'égalité

$$\begin{aligned} &x^n + ax^{2r} + bx^r + c \\ &= \frac{x}{n}(nx^{n-1} + 2rax^{2r-1} + rbx^{r-1}) \\ &\quad + a\left(1 - \frac{2r}{n}\right)x^{2r} + b\left(1 - \frac{r}{n}\right)x^r + c. \end{aligned}$$

Les racines sont séparées par le nombre zéro, joint aux racines de l'équation résoluble

$$a(n-2r)x^{2r}+b(n-r)x^{r}+c=0.$$

On doit remarquer que l'ordre de grandeur de l'exposant n par rapport aux autres est indifférent.

3° L'équation à quatre termes dans laquelle la somme des exposants des termes moyens est égale à celle des exposants des termes extrêmes

$$F(x)=x^{m}+ax^{m-r}+bx^{r}+c=0.$$

Divisant le produit $(x^{r}-\alpha)F(x)$ par $F'(x)$, et disposant de α de manière à rendre nul le coefficient du terme en x^{m-r} dans le reste, on obtient un quotient binôme et un reste de la forme

$$\alpha x^{2r}+\beta x^{r}+\gamma=0;$$

la question est donc résolue.