Nouvelles annales de mathématiques

Solutions des questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 11 (1872), p. 39-46

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__39_1>

SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 979

(voir 2e série, t. IX, p. 92),

PAR M. E. DE HUNYADY,

Professeur à l'École Polytechnique, de Bude.

Étant donnée la fonction

$$y = A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + A_3 \cos 3x + \ldots + A_n \cos nx,$$

déterminer les coefficients A_1, A_2, A_3,..., A_n, *de manière que, pour* $x = \frac{\pi}{n+1}$, y *prenne la valeur de* y_1, ..., *et que, pour* $x = \frac{n\pi}{n+1}$, $y = y_n$; $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ *étant des quantités données.* (H. BROCARD.)

1. La solution de la question précédente dépend de la

résolution du système linéaire suivant :

$$(1)\quad\begin{cases} A_1\cos x + A_2\cos 2x + \ldots + A_n\cos nx = y_1, \\ A_1\cos 2x + A_2\cos 4x + \ldots + A_n\cos 2nx = y_2, \\ A_1\cos 3x + A_2\cos 6x + \ldots + A_n\cos 3nx = y_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_1\cos nx + A_2\cos 2nx + \ldots + A_n\cos n^2x = y_n, \end{cases}$$

pour $x = \dfrac{\pi}{n+1}$.

Si l'on désigne par Δ le déterminant du système (1) et par i un nombre entier quelconque de la suite 1, 2, 3, ..., n, on trouve, d'après les règles générales de la résolution des équations d'un système linéaire,

$$(2)\quad A_i\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \ldots & \cos(i-1)x & y_1 & \cos(i+1)x & \ldots & \cos nx \\ \cos 2x & \ldots & \cos 2(i-1)x & y_2 & \cos 2(i+1)x & \ldots & \cos 2nx \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos nx & \ldots & \cos n(i-1)x & y_n & \cos n(i+1)x & \ldots & \cos n^2x \end{vmatrix}.$$

En outre, si l'on pose, pour des valeurs quelconques de k et de λ de la suite 1, 2, ..., n,

$$(3)\quad\begin{cases} \cos^2 kx + \cos^2 2kx + \ldots + \cos^2 nkx = \Sigma\cos^2 kx, \\ \cos kx\cos\lambda x + \cos 2kx\cos 2\lambda x + \ldots + \cos nkx\cos n\lambda x = \Sigma\cos kx\cos\lambda x, \end{cases}$$

$$(4)\quad y_1\cos kx + y_2\cos 2kx + \ldots + y_n\cos nkx = s_k,$$

on a, en multipliant chaque membre de l'équation (2) par le déterminant Δ,

$$(5)\quad A_i\begin{vmatrix} \Sigma\cos^2 x & \Sigma\cos x\cos 2x & \ldots & \Sigma\cos x\cos nx \\ \Sigma\cos x\cos 2x & \Sigma\cos^2 2x & \ldots & \Sigma\cos 2x\cos nx \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Sigma\cos x\cos nx & \Sigma\cos 2x\cos nx & \ldots & \Sigma\cos^2 nx \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \Sigma\cos^2 x & \ldots & \Sigma\cos x\cos(i-1)x & s_1 & \Sigma\cos x\cos(i+1)x & \ldots & \Sigma\cos x\cos nx \\ \Sigma\cos x\cos 2x & \ldots & \Sigma\cos 2x\cos(i-1)x & s_2 & \Sigma\cos 2x\cos(i+1)x & \ldots & \Sigma\cos 2x\cos nx \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Sigma\cos x\cos nx & \ldots & \Sigma\cos nx\cos(i-1)x & s_n & \Sigma\cos nx\cos(i+1)x & \ldots & \Sigma\cos n^2x \end{vmatrix}$$

2. Les éléments des déterminants précédents sont susceptibles d'une simplification importante. En remarquant que

$$\cos\varphi \cos\psi = \tfrac{1}{2}[\cos(\varphi + \psi) + \cos(\varphi - \psi)],$$

on a, pour $\varphi = kx$, $\psi = \lambda x$,

$$\cos kx \cos\lambda x = \tfrac{1}{2}[\cos(k+\lambda)x + \cos(k-\lambda)x];$$

d'où l'on tire

$$(6)\qquad \Sigma \cos kx \cos\lambda x = \tfrac{1}{2}\Sigma[\cos(k+\lambda)x + \cos(k-\lambda)x].$$

En outre, on trouve pour la somme $\Sigma \cos(k+\lambda)x$, d'après une formule bien connue (*voir*, par exemple, SERRET, *Traité de Trigonométrie*, p. 25), la valeur suivante :

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(n+1)(k+\lambda)x \sin\frac{1}{2}n(k+\lambda)x}{\sin\frac{1}{2}(k+\lambda)x},$$

à laquelle on peut donner encore la forme

$$\frac{\sin(n+1)(k+\lambda)x\cos\frac{1}{2}(k+\lambda)x}{2\sin\frac{1}{2}(k+\lambda)x} - \cos^2\tfrac{1}{2}(n+1)(k+\lambda)x,$$

en remarquant que

$$\sin\tfrac{1}{2}n(k+\lambda)x = \sin\tfrac{1}{2}[(n+1)-1](k+\lambda)x.$$

On aura enfin, en se rappelant que $x = \dfrac{\pi}{n+1}$,

$$(7)\qquad \Sigma\cos(k+\lambda)x = -\cos^2\tfrac{1}{2}(k+\lambda)\pi.$$

On trouve, de la même manière, que

$$(8)\qquad \Sigma\cos(k-\lambda)x = -\cos^2\tfrac{1}{2}(k-\lambda)\pi,$$

et, conséquemment,

$$\Sigma\cos kx\cos\lambda x = -\tfrac{1}{2}[\cos^2\tfrac{1}{2}(k+\lambda)\pi + \cos^2\tfrac{1}{2}(k-\lambda)\pi],$$

d'où l'on tire :

$$(9)\qquad \Sigma\cos kx\cos\lambda x = -1,$$

si $k+\lambda$, et conséquemment $k-\lambda$, est pair;

$$\Sigma \cos kx \cos \lambda x = 0, \tag{10}$$

si $k+\lambda$, et conséquemment $k-\lambda$, est impair.

3. En posant dans l'équation (7) $\lambda = k$, on en déduit

$$\Sigma \cos 2kx = -\cos^2 k\pi = -1.$$

L'équation (8) perd sa validité pour des valeurs $\lambda = k$, parce que, dans le cas actuel,

$$\Sigma \cos(k-\lambda)x = n.$$

Enfin, prenant dans l'équation (6) $\lambda = k$, on trouve

$$\Sigma \cos^2 kx = \tfrac{1}{2}(n-1). \tag{11}$$

4. Avant de faire les substitutions pour les éléments des déterminants dans l'équation (5), il sera convenable de distinguer le cas où n est un nombre pair de celui où n est impair.

En supposant que n est pair, l'équation (5) se simplifie, si l'on fait usage des équations (9), (10) et (11); on a, en effet, pour une valeur paire de ι,

$$A_\iota \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(n-1) & 0 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(n-1) & 0 & \dots & -1 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2}(n-1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & -1 & 0 & \dots & \frac{1}{2}(n-1) \end{vmatrix} \tag{12}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(n-1) & 0 & \dots & -1 & s_1 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(n-1) & \dots & 0 & s_2 & 0 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & -1 & \dots & 0 & s_i & 0 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & -1 & \dots & 0 & s_n & 0 & \dots & \frac{1}{2}(n-1) \end{vmatrix}$$

et, pour une valeur impaire de ι,

$$(13)\quad A_\iota \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(n-1) & 0 & -1 & .. & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(n-1) & 0 & .. & -1 \\ . & \vdots & \vdots & . & . \\ 0 & -1 & 0 & .. & \frac{1}{2}(n-1) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(n-1) & 0 & . & 0 & s_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(n-1) & . & -1 & s_2 & -1 & \dots & -1 \\ & . & & . & . & . & . & \\ -1 & 0 & \dots & -1 & s_\iota & -1 & . & 0 \\ & \vdots & & . & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & .. & 0 & s_n & 0 & .. & \frac{1}{2}(n-1) \end{vmatrix}.$$

On trouve aisément pour le coefficient de A_ι la valeur

$$\frac{1}{4}\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n-2}.$$

en outre, développant les déterminants suivant les éléments de la colonne dont le rang est ι et divisant par le coefficient de A_ι, on a .

(*a*) Si ι est un nombre pair,

$$(14)\quad A_\iota = \frac{2}{n+1}(2s_2 + 2s_4 + \ldots + 2s_{\iota-2} + 3s_\iota + 2s_{\iota+2} + \ldots + 2s_n);$$

(*b*) Si ι est un nombre impair,

$$(15)\quad A_\iota = \frac{2}{n+1}(2s_1 + 2s_3 + \ldots + 2s_{\iota-2} + 3s_\iota + 2s_{\iota+2} + \ldots + 2s_{n-1}).$$

Dans le cas où n est impair, il est facile de démontrer que le coefficient de A_ι dans l'équation (5) sera égal à zéro en vertu des équations (9), (10) et (11); d'où l'on conclut qu'on ne peut déterminer que les rapports des quantités A si n est impair.

Nota. On peut aussi résoudre le système des équations suivantes :

$$
\begin{aligned}
&B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + \ldots + B_n \sin nx = z_1,\\
&B_1 \sin 2x + B_2 \sin 4x + \ldots + B_n \sin 2nx = z_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&B_1 \sin nx + B_2 \sin 2nx + \ldots + B_n \sin n^2x = z_n,
\end{aligned}
$$

pour $x = \frac{\pi}{n+1}$, par un procédé analogue, en remarquant que

$$
\begin{aligned}
&\Sigma \sin^2 kx = \tfrac{1}{2}(n+1),\\
&\Sigma \sin kx \sin \lambda x = 0.
\end{aligned}
$$

On trouve, en effet,

$$B_i = \frac{2}{n+1}(z_1 \sin ix + z_2 \sin 2ix + \ldots + z_n \sin nix).$$

Ce dernier système a été résolu par LAGRANGE, dans le Mémoire intitulé : *Recherches sur la nature et la propagation du son* (*OEuvres*, t. I, p. 80-89), par une méthode tout à fait différente de celle que nous avons suivie.

Question 1031

(voir 2e série, t. X, p. 335);

PAR M. A. PELLISSIER,

Lieutenant au 17e d'Artillerie.

Un angle de grandeur constante se déplace dans un plan, de manière que le sommet décrive un cercle de rayon donné, et que l'un des côtés passe par un point fixe; on demande l'enveloppe de l'autre côté.

(C. HARKEMA.)

Je vais démontrer d'abord que, si par le foyer d'une conique on mène des droites faisant avec les tangentes un angle constant, le lieu des rencontres de ces droites avec les tangentes est un cercle.

En effet, soient M (*) un point du lieu, α l'angle constant de la tangente MT avec la ligne MF menée du foyer. J'abaisse FP perpendiculairement sur la tangente, je joins le centre C au point P et je mène par un point O du petit axe la droite OF faisant avec ce petit axe l'angle α; enfin je joins OM. Les deux triangles OMF et CFP ont les angles CFP et OFM égaux, comme se composant chacun d'une partie égale à $\frac{\pi}{2} - \alpha$ et d'une partie commune MFC; de plus, on a

$$\frac{FP}{CF} = \frac{FM}{OF},$$

à cause de la similitude des triangles rectangles FMP, OFC. Les triangles OMF, PFC sont donc semblables et donnent

$$\frac{OM}{CP} = \frac{OF}{CF}.$$

Or on a

$$PC = a, \quad CF = c, \quad OF = \frac{c}{\sin \alpha};$$

d'où

$$OM = \frac{a}{\sin \alpha}.$$

J'en conclus, le point O étant fixe et la longueur OM constante, que le lieu des points M est un cercle décrit du point O comme centre avec $\frac{a}{\sin \alpha}$ pour rayon.

Si maintenant je transforme la figure par la méthode des polaires réciproques, il devient évident que l'enveloppe demandée est une conique ayant son foyer au point

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

fixe. C'est une ellipse, si le point donné est à l'intérieur du cercle; une parabole, s'il est sur le cercle; et enfin une hyperbole, s'il est à l'extérieur.

Note — La meme question a éte resolue par MM. Ylliac de Goïsel, Moret-Blanc, Callandreau, Lecornu, eleve du lycee de Caen