Faure

# Théorie des indices par rapport à une courbe et une surface du second degré

*Nouvelles annales de mathématiques 2e série*, tome 11 (1872), p. 385-404
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__385_0>

# THÉORIE DES INDICES PAR RAPPORT A UNE COURBE ET UNE SURFACE DU SECOND DEGRÉ;

(suite, voir même tome, p. 261);

PAR M. FAURE,
Chef d'escadrons d'Artillerie.

---

## *Indice d'un plan par rapport à une surface du second degré.*

V. DÉFINITION. — *L'indice d'un plan par rapport à une surface du second degré est égal à l'indice du point où le plan est rencontré par le diamètre conjugué à sa direction, divisé par le produit des carrés des demi-axes de la section diamétrale parallèle au plan.*

Les théorèmes suivants peuvent aussi servir de définition à l'indice d'un plan.

1° L'indice d'un plan est égal au produit des distances de ce plan aux plans tangents parallèles au plan donné, divisé par le carré du produit des demi-axes de la surface;

2° L'indice d'un plan est égal au produit des distances du pôle de ce plan et du centre de la surface au plan, divisé par le produit des carrés des demi-axes de la surface;

3° Si l'on trace dans le plan donné une droite arbitraire, l'indice de ce plan, pris en signe contraire, sera égal au produit des sinus des angles formés par le plan donné avec les plans tangents menés à la surface par la droite arbitraire, divisé par le produit des sinus des angles formés par les plans tangents avec le plan diamétral qui passe par cette droite et par le carré des demi-axes de la section déterminée par le plan diamétral;

4° L'indice d'un plan est égal au carré de la distance du centre de la surface à ce plan, divisé par le produit des carrés des demi-axes de la surface, diminué de l'inverse du produit des carrés des demi-axes de la section diamétrale parallèle au plan;

5° L'indice d'un plan, pris en signe contraire, est égal au produit des demi-axes de la section déterminée par ce plan, divisé par le cube du produit des demi-axes de la section diamétrale parallèle au plan;

6° L'indice d'un plan, pris en signe contraire, est égal à l'inverse du produit que l'on obtient en multipliant le produit des demi-axes de la section diamétrale parallèle au plan par le produit des demi-axes de la conique déterminée par ce plan diamétral dans le cône circonscrit à la surface suivant son intersection avec le plan donné;

7° On mène à la surface un plan tangent en un quelconque de ses points d'intersection avec le plan donné; l'indice de ce plan, pris en signe contraire, sera égal au carré du sinus de l'angle de ces plans, divisé par le carré de la distance du centre de la surface au plan tangent et par le carré du demi-diamètre parallèle à l'intersection des deux plans.

*Nota.* — L'indice d'un plan tangent à la surface est nul, et l'indice d'un plan qui passe par le centre de la surface est égal et de signe contraire à l'inverse du carré du produit des demi-axes de la section déterminée par ce plan.

VI. *Notations.* — Nous indiquerons les points par des lettres romaines minuscules, les plans par des lettres romaines majuscules, et les droites par des lettres grecques. Les indices étant désignés par l'initiale I, nous écrirons

$I_a$, $I_\alpha$, $I_A$ pour indiquer l'indice du point $a$, de la droite $\alpha$ et du plan A.

VII. Lemme. — *Quatre points $a$, $b$, $c$, $d$ sont donnés sur une droite; on prend sur cette droite le point $a'$ conjugué harmonique du point $a$ par rapport aux points $c$ et $d$, le point $b'$ conjugué harmonique du point $b$ par rapport aux mêmes points $c$ et $d$. Si l'on désigne par* A *le rapport anharmonique* $(a, b, c, d)$, *et par* A' *le rapport anharmonique* $(a, b, b', a')$, *on a la relation.*

$$(1 + A)^2 = 4AA'.$$

En effet, les points $a$, $a'$, $c$, $d$ étant en position harmonique, on a (*Géométrie supérieure*, 63), $b$ étant un point arbitraire,

$$2\frac{ba'}{aa'} = \frac{bc}{ac} + \frac{bd}{ad}:$$

les points $b$, $b'$, $c$, $d$ donnent de même la relation

$$2\frac{ab'}{bb'} = \frac{ac}{bc} + \frac{ad}{bd},$$

dans laquelle $a$ est un point arbitraire.

Si l'on multiplie ces deux égalités membre à membre, on obtient celle du lemme.

On remarquera que l'on peut remplacer, dans cette égalité, le rapport A par son inverse; on voit également que notre lemme s'applique au cas où les points $c$ et $d$ seraient imaginaires, puisque le rapport de $(1 + A)^2$ à A peut s'exprimer au moyen des éléments qui déterminent les points donnés, c'est-à-dire la somme et le produit de leurs distances à une origine fixe. Les points $a$ et $b$ pourraient aussi être imaginaires.

*Remarque.* — Si l'on conçoit une conique passant par les points $c$ et $d$ (réels ou imaginaires), et que l'on prenne les polaires des points $a$ et $b$ par rapport à cette conique, ces polaires passeront par les points $a'$ et $b'$, de sorte que le rapport A' sera égal au rapport des distances du point $a$ aux polaires des points $b$ et $a$ divisé par le rapport des distances du point $b$ à ces mêmes polaires.

De même, si l'on conçoit une surface du second degré passant par les points $c$ et $d$, et que l'on prenne les plans polaires des points $a$ et $b$ par rapport à cette surface, le rapport anharmonique A' sera égal au rapport des distances du point $a$ aux plans polaires des points $b$ et $a$ divisé par le rapport des distances du point $b$ à ces mêmes plans polaires.

### *Relations entre les indices des points et des droites par rapport à une conique.*

VIII. Puisqu'une droite se détermine par deux de ses points, l'indice d'une droite doit pouvoir s'obtenir à l'aide des indices de deux de ses points; de même, puisqu'un point se détermine par l'intersection de deux droites, l'indice d'un point doit pouvoir s'obtenir à l'aide des indices de deux droites passant par ce point.

Nous allons établir ces relations.

Première relation. — Indice d'une droite déterminée par deux points.

*On donne deux points $m$, $n$ sur une droite $\lambda$ rencontrant une conique aux points $a$ et $b$ (réels ou imaginaires); si l'on désigne par $\mathfrak{L}$ le rapport anharmonique $(m, n, a, b)$, on aura la relation*

$$\frac{(1-\mathfrak{L})^2}{4\mathfrak{L}} = -\, mn^2 \frac{I_\lambda}{I_m I_n}.$$

En effet, le rapport anharmonique $\mathfrak{L}$ donne d'abord

$$\frac{(1-\mathfrak{L})^2}{\mathfrak{L}} = \frac{(ma.nb - mb.na)^2}{ma.mb.na.nb},$$

ou, à cause de l'identité,

$$ma.bn + mb.na + mn.ab = 0,$$

$$\frac{(1-\mathfrak{L})^2}{\mathfrak{L}} = \frac{mn^2.ab^2}{ma.mb.na.nb}.$$

Or, d'après nos définitions, D étant le demi-diamètre de la conique parallèle à la droite $mn$, on a

$$I_m = \frac{ma.mb}{D^2}, \quad I_n = \frac{na.nb}{D^2}, \quad I_\lambda = -\frac{ab^2}{4D^4},$$

d'où résulte la relation que nous voulions démontrer.

On peut donner au théorème une forme différente, en ajoutant l'unité aux deux membres de l'égalité démontrée. Son premier membre $\frac{(1+\mathfrak{L})^2}{4\mathfrak{L}}$, d'après le lemme, devient un rapport anharmonique, et, d'après la remarque de ce lemme, ce rapport a pour valeur

$$\frac{(m, \nu)}{(m, \mu)} : \frac{(n, \nu)}{(n, \mu)},$$

les droites $\mu$ et $\nu$ étant les polaires des points $m$ et $n$.

Mais, d'après un théorème connu, lorsque l'on a deux droites et leurs pôles par rapport à une conique, les distances de chacune de ces droites au pôle de l'autre sont entre elles comme les distances de ces mêmes droites au centre $o$ de la conique. On a donc

$$\frac{(m, \nu)}{(n, \mu)} = \frac{(o, \nu)}{(o, \mu)},$$

et par conséquent

$$\frac{(1+\mathcal{L})^2}{4\mathcal{L}}=\frac{\mathrm{I}_m\mathrm{I}_n-mn^2\mathrm{I}_l}{\mathrm{I}_m\mathrm{I}_n}=\frac{(n,\mu)^2(o,\nu)}{(m,\mu)(n,\nu)(o,\mu)}.$$

Or, d'après la définition (1°) de l'indice du point,

$$\mathrm{I}_m=-\frac{(m,\mu)}{(o,\mu)},\quad \mathrm{I}_n=-\frac{(n,\nu)}{(o,\nu)};$$

remplaçant au dénominateur de l'expression précédente $\mathrm{I}_m$ et $\mathrm{I}_n$ par ces valeurs, on obtient ce théorème :

*Le produit des indices de deux points, diminué de l'indice de la droite qui les joint, multiplié par le carré de leur distance, est égal au carré de la distance de l'un des points à la polaire de l'autre divisé par le carré de la distance du centre de la conique à cette polaire*

$$\mathrm{I}_m\mathrm{I}_n-mn^2\mathrm{I}_\lambda=\frac{(n,\mu)^2}{(o,\mu)^2}=\frac{(m,\nu)^2}{(o,\nu)^2}.$$

Deuxième relation. — Indice d'un point déterminé par deux droites.

*On donne deux droites $\mu$ et $\nu$ se coupant au point $l$; si l'on mène de ce point les tangentes $\alpha$ et $\beta$ à une conique, et que l'on désigne par $\mathcal{L}$ le rapport anharmonique du faisceau $(\mu, \nu, \alpha, \beta)$, on aura la relation*

$$\frac{(1-\mathcal{L})^2}{4\mathcal{L}}=\frac{\sin^2(\mu,\nu)}{\Sigma^2}\,\frac{\mathrm{I}_l}{\mathrm{I}_\mu\mathrm{I}_\nu},$$

*dans laquelle $\Sigma$ indique le produit des demi-axes de la conique.*

La démonstration de ce théorème se fera d'une manière analogue à la précédente; après avoir exprimé la valeur de la fonction anharmonique du premier membre, au moyen des sinus des angles que forment entre elles les droites données et les tangentes, on fera usage de la définition (4°) de l'indice d'une droite et de la définition (8°) de l'indice du point.

Si l'on ajoute l'unité aux deux membres de l'égalité précédente, on arrive facilement à cet autre théorème :

*Étant données deux droites $\mu$ et $\nu$ se coupant au point $l$ et les pôles $m$ et $n$ de ces droites par rapport à une conique qui a pour centre le point $o$, on a la relation*

$$\Sigma^2 I_\mu I_\nu + \sin^2(\mu, \nu) I_l = \frac{(m, \nu)^2 (o, \mu)^2}{\Sigma^2} = \frac{(n, \mu)^2 (o, \nu)^2}{\Sigma^2},$$

*dans laquelle $\Sigma$ désigne le produit des demi-axes principaux de la conique.*

Nous indiquerons une troisième relation, celle qui a lieu entre les indices d'un point et d'une droite quelconques.

Troisième relation. — *Étant donnés un point $m$ et une droite $\lambda$, si l'on joint le point $m$ au pôle $l$ de la droite $\lambda$ par rapport à une conique et que l'on désigne par R le rapport anharmonique déterminé par les points $m$, $l$ et les traces de la droite $lm$ sur la conique, on aura la relation*

$$\frac{(1 + R)^2}{4R} = -\frac{(m, \lambda)^2}{\Sigma^2 I_m I_\lambda}.$$

En effet, d'après la remarque du lemme, $\mu$ étant la polaire du point $m$,

$$\frac{(1 + R)^2}{4R} = \frac{(m, \lambda)}{(m, \mu)} : \frac{(l, \lambda)}{(l, \mu)},$$

mais, le point $o$ étant le centre de la conique, on a

$$I_m = -\frac{(m, \mu)}{(o, \mu)}, \quad I_\lambda = \frac{(l, \lambda)(o, \lambda)}{\Sigma^2}, \quad \frac{(m, \lambda)}{(l, \mu)} = \frac{(o, \lambda)}{(o, \mu)},$$

d'où résulte la relation indiquée.

Lorsque la droite $\lambda$ est la polaire du point $m$, on a

$$R = 1;$$

par conséquent, le produit des indices d'une droite et de son pôle, changé de signe, est égal au carré de la distance du pôle à la droite, divisé par le carré du produit des demi-axes de la conique.

### *Relations entre les indices des points, des droites et des plans, par rapport à une surface du second degré.*

IX. Première relation. — Indice d'une droite déterminée par deux points.

*On donne deux points $m$ et $n$ sur une droite $\lambda$, rencontrant une surface du second degré aux points $a$ et $b$; si l'on désigne par $\rho$ le rapport anharmonique $(m, n, a, b)$, on aura la relation*

$$\frac{(1-\rho)^2}{4\rho} = -\,\overline{mn}^2\,\frac{I_\lambda}{I_m I_n}.$$

Cette relation peut se démontrer comme son analogue dans le plan, en suivant une marche identique; on peut la déduire aussi de celle-ci en y remplaçant les indices pris par rapport à une conique par les indices pris par rapport à la surface, d'après les deux principes cités (III et IV).

On peut donner au théorème cet autre énoncé, en ajoutant l'unité aux deux membres de l'égalité :

*Étant donnés deux points $m$ et $n$ sur une droite $\lambda$, ainsi que les plans polaires* M, N *de ces points, par rapport à une surface du second degré qui a pour centre le point $o$, on a*

$$I_m I_n - \overline{mn}^2 I_\lambda = \frac{(n,\ M)^2}{(o,\ M)^2} = \frac{(m,\ N)^2}{(o,\ N)^2}.$$

Deuxième relation. — Indice d'un point ou d'un plan déterminé par deux droites.

*Étant données une surface du second degré et deux droites* $\mu$ *et* $\nu$ *se coupant au point* $l$, *si l'on mène par ce point les tangentes* $\alpha$ *et* $\beta$ *à la section de la surface par le plan* P, *déterminé par les droites données, et que l'on désigne par* $\zeta$ *le rapport anharmonique du faisceau* $(\mu, \nu, \alpha, \beta)$, *on aura la relation*

$$\frac{(1-\zeta)^2}{4\zeta} = -\sin^2(\mu, \nu)\frac{I_l I_P}{I_\mu I_\nu}.$$

Cette relation peut se démontrer directement, mais il est plus simple de la déduire de la deuxième relation relative aux coniques, en y faisant la substitution d'indices indiquée ci-dessus. On aura égard à la définition 5° de l'indice d'un plan.

En ajoutant l'unité aux deux membres de l'égalité, on obtient cet autre théorème :

*Étant données une surface du second degré et deux droites* $\mu$, $\nu$ *se coupant au point* $l$, *si l'on désigne par* $m$ *le pôle de l'une des droites* $\mu$, *par rapport à la conique déterminée par le plan* P *des droites données, par* $o$ *le centre de cette conique, et par* $\sigma$ *le produit de ses demi-axes principaux, on a la relation*

$$I_\mu I_\nu - \sin^2(\mu, \nu) I_l I_P = \frac{(m, \nu)^2 (o, \mu)^2}{\sigma^4}.$$

Troisième relation. — Indice d'un plan déterminé par une droite et un point.

*Étant donnés une surface du second degré, un point* $l$ *et une droite* $\lambda$, *si l'on joint le point* $l$ *au pôle* $f$ *de la droite* $\lambda$ *par rapport à la section déterminée par le plan* P *qui passe par le point* $l$ *et la droite* $\lambda$, *et que l'on* *désigne par* R *le rapport anharmonique formé avec les points* $l$, $f$ *et les traces de la droite* $lf$ *sur la surface, on a*

$$\frac{(1+R)^2}{4R} = \frac{(l,\lambda)^2 I_P}{I_l I_\lambda}.$$

Cette relation se déduit immédiatement de la troisième relation relative aux coniques, en y faisant la substitution d'indices déjà indiquée, et en ayant égard à la définition 5° de l'indice du plan.

QUATRIÈME RELATION. — Indice d'un plan déterminé par trois points.

*Étant donnés trois points* $l$, $m$, $n$ *déterminant un plan* P *et une surface du second degré, on désigne par* $\mathfrak{L}$ *le rapport anharmonique déterminé par les points* $m$, $n$ *et les traces de la droite* $mn$ *sur la surface, par* R *le rapport anharmonique déterminé par le point* $l$, *le pôle de la droite* $mn$ *(par rapport à la section de la surface par le plan* P*) et les traces sur la surface de la droite menée de ce pôle au point* $l$. *On a alors la relation*

$$\frac{(1-\mathfrak{L})^2}{4\mathfrak{L}}\,\frac{(1+R)^2}{4R} = -\frac{4\,lmn^2\, I_P}{I_l I_m I_n},$$

*dans laquelle* $lmn$ *désigne la surface du triangle déterminé par les points donnés.*

Cette relation s'obtient en multipliant membre à membre la première relation par la troisième.

CINQUIÈME RELATION. — Indice d'une droite déterminée par deux plans.

*Étant donnés une surface du second degré et deux plans* M *et* N *se coupant suivant la droite* $\lambda$, *si l'on mène par cette droite les plans tangents* A, B *à la surface, et que l'on désigne par* $\mathfrak{L}$ *le rapport anharmonique du* *faisceau de plans* (M, N, A, B), *on aura la relation*

$$\frac{(1-\mathfrak{L})^2}{4\mathfrak{L}} = \frac{\sin^2(M, N)}{\Sigma^2}\,\frac{I_\lambda}{I_M I_N},$$

*dans laquelle* $\Sigma$ *indique le produit des demi-axes principaux de la surface.*

Pour démontrer ce théorème, on peut suivre une marche analogue à celle que nous avons indiquée pour démontrer la première relation relative aux coniques. Ecrivant la valeur de la fonction anharmonique du premier membre, et ayant égard à l'identité connue qui existe entre les sinus des angles formés par quatre plans, on trouve

$$\frac{(1-\mathfrak{L})^2}{\mathfrak{L}} = \frac{\sin^2(M, N)\sin^2(A, B)}{\sin(M, A)\sin(M, B)\sin(N, A)\sin(N, B)}.$$

Or d'après la définition 3° de l'indice d'un plan, D étant le produit des demi-axes de la section diamétrale qui passe par l'intersection $\lambda$ des plans M et N,

$$I_M = -\frac{\sin(M, A)\sin(M, B)}{D^2\sin(D, A)\sin(D, B)},\quad I_N = -\frac{\sin(N, A)\sin(N, B)}{D^2\sin(D, A)\sin(D, B)},$$

et, d'après la définition 4° de l'indice d'une droite,

$$I_\lambda = \frac{\Sigma^2\sin^2(A, B)}{4D^4\sin^2(D, A)\sin^2(D, B)};$$

de là résulte la relation indiquée.

Si l'on ajoute l'unité aux deux membres de cette relation, on arrive à ce théorème :

*Étant donnés deux plans* M, N *et les pôles* $m$, $n$ *de ces plans, par rapport à une surface du second degré qui a pour centre le point* $o$, *on a la relation*

$$\Sigma^2 I_M I_N + \sin^2(M, N)\,I_\lambda = \frac{(m, N)^2(o, M)^2}{\Sigma^2} = \frac{(n, M)^2(o, N)^2}{\Sigma^2}.$$

SIXIÈME RELATION. — Indice d'un point déterminé par une droite et un plan.

*Étant donnés un plan* L *et une droite* $\lambda$, *se coupant au point* $p$, *et une surface du second degré, si l'on désigne par* F *le plan qui passe par le point* $p$ *et la polaire de la droite donnée, par* R *le rapport anharmonique formé par les plans* L, F *et les plans tangents à la surface menés par l'intersection des deux premiers, on a*

$$\frac{(1+R)^2}{4R} = -\frac{\sin^2(\lambda, L)\,I_p}{\Sigma^2 I_\lambda I_L}.$$

Désignons par $l$ et $f$ les pôles des plans L et F, et menons la droite $lf$. Cette droite rencontre le plan F en un point conjugué au point $f$, et le plan L en un point conjugué au point $l$. Mais le pôle $f$ se trouve au point d'intersection de la droite $\lambda$ avec le plan polaire du point $p$; ainsi les points $p$ et $f$ sont conjugués à la surface. Il résulte de là que le premier membre de l'égalité ci-dessus (voir le lemme) est égal au rapport anharmonique formé avec les points $l$, $f$ et les traces de la droite $lf$ sur la surface, ou, ce qui revient au même,

$$\frac{(1+R)^2}{4R} = \frac{(l, F)}{(l, L)} : \frac{(f, F)}{(f, L)}.$$

Or, le point $o$ étant le centre de la surface,

$$\frac{(l, F)}{(f, L)} = \frac{(o, F)}{(o, L)}:$$

d'où résulte, par l'élimination de la distance $(l, F)$,

$$\frac{(1+R)^2}{4R} = \frac{(o, F)(f, L)^2}{(o, L)(l, L)(f, F)};$$

Or

$$(f, L) = fp\sin(\lambda, L),$$

et, par définition,

$$I_L = \frac{(l, L)(o, L)}{\Sigma^2}, \quad I_f = -\frac{(f, F)}{(o, F)}.$$

Comme d'ailleurs les points $f$ et $p$ sont conjugués, notre première relation donne

$$I_f I_p = fp^2 I_\lambda.$$

De ces valeurs résulte l'égalité à démontrer.

Septième relation. — Indice d'un point déterminé par trois plans.

*Étant donnés trois plans* L, M, N, *se coupant au point p, et une surface du second degré; par la droite* $\lambda$, *intersection des plans* M *et* N, *on mène les plans tangents à la surface, et l'on désigne par* $\mathfrak{L}$ *le rapport anharmonique déterminé par les plans* M, N *et ces deux plans tangents. Par le point p et la polaire de la droite* $\lambda$ *on fait passer un plan* F, *et l'on désigne par* R *le rapport anharmonique déterminé par les plans* L, F *et les plans tangents à la surface menés par l'intersection de ces plans; on a alors la relation*

$$\frac{(1-\mathfrak{L})^2}{4\mathfrak{L}} \frac{(1+R)^2}{4R} = -\frac{\sin^2 LMN\, I_p}{\Sigma^4 I_L I_M I_N}.$$

Ce théorème se démontre en multipliant membre à membre la cinquième et la sixième de nos relations, et remarquant que le volume V d'un tétraèdre formé par les plans L, M, N et un quatrième plan quelconque est donné par la relation

$$(3V)^2 = 2LMN \sin(M, N)\sin(\lambda, L) = 2LMN \sin LMN,$$

L, M, N désignant les aires des faces (*).

(*) Le sinus de l'angle solide LMN est aussi égal au facteur par lequel il faut multiplier le produit des trois arêtes issues du point $p$ pour obtenir six fois le volume du tétraèdre.

**Huitième relation.** — Relation entre les indices d'un point et d'un plan.

*Étant donnés un point $l$, un plan $M$ et une surface du second degré, on désigne par $R$ le rapport anharmonique déterminé par le point $l$, le pôle $m$ du plan et les traces de la droite $lm$ sur la surface,*

$$\frac{(1+R)^2}{4R} = -\frac{(l, M)^2}{\Sigma^2 I_l I_M}.$$

Le lemme donne, en effet, $L$ étant le plan polaire du point $l$,

$$\frac{(1+R)^2}{4R} = \frac{(l, M)}{(l, L)} : \frac{(m, M)}{(m, L)};$$

or, $o$ étant le centre de la surface,

$$I_l = -\frac{(l, L)}{(o, L)}, \quad I_M = \frac{(m, M)(o, M)}{\Sigma^2}, \quad \frac{(l, M)}{(m, L)} = \frac{(o, M)}{(o, L)};$$

de là résulte la relation indiquée.

Il est facile de trouver d'autres relations entre les indices, par exemple, en combinant de diverses manières celles que nous venons d'obtenir. C'est ce que nous allons faire dans le paragraphe suivant pour des cas particuliers.

*Propriétés d'un système de deux, trois ou quatre points, droites et plans conjugués à une surface du second ordre.*

X. Les relations établies précédemment donnent, comme cas particuliers, les suivantes, dans le même ordre.

*Première proposition.* — Le produit des indices de deux points conjugués est égal à l'indice de la droite qui joint ces points, multiplié par le carré de leur distance.

*Deuxième proposition.* — Le produit des indices de deux droites conjuguées est égal à l'indice du plan qu'elles déterminent, multiplié par l'indice de leur point d'intersection et par le carré du sinus de leur angle.

*Troisième proposition.* — Le produit des indices d'un point et d'une droite conjugués est égal à l'indice du plan déterminé par le point et la droite, multiplié par le carré de la distance du point à la droite.

*Quatrième proposition.* — Le produit des indices des sommets d'un triangle conjugué est égal à l'indice du plan du triangle, multiplié par le carré du double de sa surface.

*Cinquième proposition.* — Le produit des indices de deux plans conjugués, pris en signe contraire, est égal à l'indice de leur droite d'intersection, multiplié par le carré du sinus de leur angle et divisé par le produit des carrés des demi-axes de la surface.

*Sixième proposition.* — Le produit des indices d'une droite et d'un plan conjugués, pris en signe contraire, est égal à l'indice de leur point d'intersection, multiplié par le carré du sinus de leur angle et divisé par le produit des carrés des demi-axes de la surface.

*Septième proposition.* — Le produit des indices des faces d'un trièdre conjugué est égal à l'indice de son sommet, multiplié par le carré du sinus de l'angle solide formé par ces trois faces, divisé par la quatrième puissance du produit des demi-axes de la surface.

*Huitième proposition.* — Le produit des indices d'un plan et de son pôle est égal et de signe contraire au carré de la distance du pôle au plan, divisé par le produit des carrés des demi-axes de sa surface.

*Neuvième proposition.* — Le produit des indices des côtés d'un triangle conjugué est égal au carré de l'indice du plan du triangle, multiplié par le carré du rapport que l'on obtient en divisant le produit des hauteurs du triangle par le double de sa surface.

Ce théorème se déduit de la proposition quatrième, dans laquelle on élimine les indices des sommets à l'aide de la proposition troisième.

*Dixième proposition.* — Le produit, pris en signe contraire, des indices des arêtes d'un trièdre conjugué, est égal au carré du sinus de l'angle solide trièdre, divisé par le carré du produit des demi-axes de la surface.

Pour démontrer ce théorème, on se sert de la proposition deuxième, on multiplie les deux membres de l'égalité par l'indice de la troisième arête, et l'on a égard à la proposition sixième.

*Onzième proposition.* — Le produit, pris en signe contraire, des indices des sommets d'un tétraèdre conjugué est égal au carré du sextuple de son volume, divisé par le produit des carrés des demi-axes de la surface.

On se sert de la proposition quatrième, on multiplie les deux membres de l'égalité par l'indice du quatrième sommet, et l'on a égard à la proposition huitième.

*Douzième proposition.* — Le produit, pris en signe contraire, des indices des faces d'un tétraèdre conjugué, est égal au carré du produit des hauteurs du tétraèdre, divisé par la sixième puissance du produit des demi-axes de la surface et par le carré du sextuple du volume du tétraèdre.

Cette proposition se déduit de la précédente, dans laquelle on élimine les indices des sommets au moyen de la huitième proposition.

*Treizième proposition.* — Le produit des indices de deux droites polaires réciproques par rapport à une surface du second degré est égal et de signe contraire au carré du sinus de leur angle, multiplié par le carré de leur plus courte distance et divisé par le carré du produit des demi-axes de la surface.

En effet, $l$ et $m$ étant deux points de la première droite, $n$ et $p$ deux points de la seconde, choisis de façon que le tétraèdre $lmnp$ soit conjugué à la surface, la première proposition donne le produit des indices des points $l$ et $m$ et le produit des indices des points $n$ et $p$. Si l'on multiplie entre eux ces deux produits, en ayant égard à la onzième proposition et à l'expression du volume d'un tétraèdre en fonction des arêtes opposées et de leur plus courte distance, on obtient le théorème que l'on voulait établir.

Considérons un tétraèdre $lmnp$ conjugué à une surface du second ordre dont le centre est au point $o$. L'indice du point $p$, à cause de la définition 1°, est égal et de signe contraire au rapport du volume $lmnp$ au volume $olmn$; les indices des points $l$, $m$, $n$ s'expriment d'une manière analogue, et, comme le volume du tétraèdre donné est la somme algébrique des quatre tétraèdres qui ont pour sommet le centre $o$ et pour bases les faces du tétraèdre $lmnp$, on voit que :

*Quatorzième proposition.* — La somme des valeurs inverses des indices des sommets d'un tétraèdre conjugué est égale à $-1$.

Laissant fixe le sommet $p$ du tétraèdre, le triangle conjugué $lmn$ pourra occuper une infinité de positions dans son plan P (plan polaire du point $p$), d'où il suit que, si l'on considère dans un plan P la série des triangles $lmn$ conjugués à la surface, on aura

$$\frac{1}{I_l} + \frac{1}{I_m} + \frac{1}{I_n} = -1 - \frac{1}{I_p} = \text{const.}$$

Pour trouver la valeur de la constante, nous supposerons que le triangle conjugué a pour l'un de ses sommets le centre de la section déterminée par le plan P; les deux autres étant à l'infini, il en résulte que :

*Quinzième proposition.* — La somme des inverses des indices des sommets d'un triangle conjugué est égale à l'inverse de l'indice du centre de la section déterminée dans la surface par le plan du triangle.

Si le plan du triangle passe par le centre de la surface, la somme dont il s'agit est égale à $-1$. Considérons donc un triangle $lmn$ conjugué à la surface et situé dans un plan diamétral. Laissant fixe le sommet $n$ du triangle, les couples de points $l$ et $m$ pourront occuper une infinité de positions sur la droite $lm$, et l'on aura

$$\frac{1}{I_l} + \frac{1}{I_m} = -1 - \frac{1}{I_n} = \text{const.}$$

On déterminera la constante en supposant que l'un des points conjugués est le milieu de la corde déterminée dans la surface; donc :

*Seizième proposition.* — La somme des inverses des indices de deux points conjugués est égale à l'inverse de l'indice du point milieu de la corde déterminée dans la surface par la droite qui joint les deux points.

Pour compléter cette série de propriétés, nous donnons sans démonstration les propositions suivantes. Nous montrerons, dans un autre article, que tous ces théorèmes sont des cas particuliers de quelques énoncés très-généraux.

*Dix-septième proposition.* — Si, par un point fixe d'un plan donné, on mène dans ce plan des couples de droites conjuguées, la somme des inverses des indices de ces droites est constante.

*Dix-huitième proposition.* — Lorsqu'un triangle est conjugué, la somme des inverses des indices des côtés de ce triangle est égale à la somme des carrés des inverses des demi-axes de la section diamétrale de la surface parallèle au plan du triangle, divisée par l'indice de ce plan.

*Dix-neuvième proposition.* — Lorsqu'un trièdre est conjugué, la somme des inverses des indices de ses arêtes est égale au carré de la distance de son sommet au centre de la surface, diminué de la somme des carrés des demi-axes de cette surface, la différence étant divisée par l'indice du sommet du trièdre, pris en signe contraire.

*Vingtième proposition.* — Lorsqu'un tétraèdre est conjugué, la somme des inverses des indices de ses six arêtes est égale à la somme des carrés des demi-axes de la surface, prise en signe contraire.

*Vingt et unième proposition.* — Si, par une droite fixe, on mène deux plans conjugués, la somme des inverses des indices de ces plans est constante.

*Vingt-deuxième proposition.* — Si, par un point fixe, on mène trois plans conjugués, la somme des inverses des indices de ces plans est constante.

*Vingt-troisième proposition.* — La somme des inverses des indices des faces d'un tétraèdre conjugué est égale et de signe contraire à la somme des carrés des rectangles construits sur les demi-axes de la surface.

*Vingt-quatrième proposition.* — La somme des indices de deux, de trois ou quatre points conjugués est égale à l'indice du point de moyenne distance de ces points, multiplié par le carré du nombre des points.

*Vingt-cinquième proposition.* — Si, par un point fixe d'un plan donné, on mène dans ce plan des couples de droites conjuguées, la somme des indices de ces droites, divisée par le carré du sinus de leur angle, est constante.

*Vingt-sixième proposition.* — Si, par un point fixe, on mène trois droites conjuguées, la somme que l'on obtient en divisant l'indice de chaque droite par le carré du sinus de l'angle que forme cette droite avec le plan des deux autres est constante et égale à la somme des indices de trois droites rectangulaires passant par le point fixe.

*Vingt-septième proposition.* — Si, par une droite fixe, on mène deux plans conjugués, la somme des indices de ces plans, divisée par le carré du sinus de leur angle, est constante.

*Vingt-huitième proposition.* — Si, par un point fixe, on mène trois plans conjugués, la somme que l'on obtient en divisant l'indice de chaque plan par le carré du sinus de l'angle que fait ce plan avec l'intersection des deux autres est constante et égale à la somme des indices de trois plans rectangulaires passant par le point fixe.