GEORGES DOSTOR

Surfaces de révolution du second degré

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 11 (1872), p. 362-373

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__362_1>

SURFACES DE RÉVOLUTION DU SECOND DEGRÉ;

PAR M. GEORGES DOSTOR.

1. *Conditions nécessaires pour qu'une surface du second degré soit de révolution.* — Supposons que l'équation générale

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} f(x, y, z) = {} & Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 \\ & + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy \\ & + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0 \end{aligned}\right.$$

représente une surface de révolution.

Admettons d'abord que les coefficients B, B', B'' des rectangles des trois variables soient tous différents de zéro.

Tous les plans conduits par l'axe de révolution sont des plans principaux, de sorte que, si α, β, γ désignent les cosinus des angles de direction d'une droite quelconque perpendiculaire à l'axe, l'équation

$$\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z = 0,$$

ou celle développée

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} &(A\alpha + B''\beta + B'\gamma)x + (B''\alpha + A'\beta + B\gamma)y \\ &\quad + (B'\alpha + B\beta + A''\gamma)z + C\alpha + C'\beta + C''\gamma = 0 \end{aligned} \right.$$

représentera le plan méridien perpendiculaire à cette droite.

La perpendicularité de la droite (α, β, γ) et du plan (2) est d'ailleurs exprimée par l'égalité de rapports

$$\frac{A\alpha + B''\beta + B'\gamma}{\alpha} = \frac{B''\alpha + A'\beta + B\gamma}{\beta} = \frac{B'\alpha + B\beta + A''\gamma}{\gamma} = s,$$

s désignant la valeur commune de ces rapports.

Ces équations, qui reviennent à

$$\begin{aligned} (A - s)\alpha + B''\beta + B'\gamma &= 0, \\ B''\alpha + (A' - s)\beta + B\gamma &= 0, \\ B'\alpha + B\beta + (A'' - s)\gamma &= 0, \end{aligned}$$

peuvent se transformer. Pour cela, multiplions la première par B, la seconde par B′, la troisième par B″, et ajoutons aux deux membres des égalités résultantes les quantités respectives $B'B''\alpha$, $B''B\beta$, $BB'\gamma$; nous trouvons ainsi les relations

$$\begin{aligned} &B'B''\alpha + B''B\beta + BB'\gamma \\ &\quad = [(s - A)B + B'B'']\alpha \\ &\quad = [(s - A')B' + B''B]\beta \\ &\quad = [(s - A'')B'' + BB']\gamma. \end{aligned}$$

Cela obtenu, nous ferons observer que toute droite perpendiculaire à l'axe est normale à l'un des plans méridiens, lesquels existent en nombre infini; par conséquent, les relations précédentes doivent exister pour une infinité de valeurs de α, β, γ. Il faudra donc que l'on ait séparément

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{c} B'B''\alpha + B''B\beta + BB'\gamma = 0, \\ (s-A)B + B'B'' = (s-A')B' + B''B = (s-A'')B'' + BB' = 0, \end{array}\right.$$

d'où l'on tire

$$(\mathrm{I})\qquad s = A - \frac{B'B''}{B} = A' - \frac{B''B}{B'} = A'' - \frac{BB'}{B''}.$$

Telles sont les *conditions nécessaires* pour que l'équation (1) du second degré représente une surface de révolution.

2. *Autre expression de ces conditions.* — Posons

$$(4)\qquad S + 2s = A + A' + A''.$$

Si nous ajoutons les deux dernières valeurs (I) de s, nous avons

$$2s = A' + A'' - \frac{B''B}{B'} - \frac{BB'}{B''},$$

qui, étant retranché de (4), donne

$$S = A + \frac{B''B}{B'} + \frac{BB'}{B''}.$$

Les conditions (I) peuvent donc aussi se mettre sous la forme

$$(\mathrm{II})\qquad \left\{\begin{aligned} S &= A + \frac{B''B}{B'} + \frac{BB'}{B''} = A' + \frac{BB'}{B''} + \frac{B'B''}{B} \\ &= A' + \frac{B'B''}{B} + \frac{B''B}{B'}, \end{aligned}\right.$$

dont l'emploi se présentera plus loin au n° 6.

3. *Les conditions* (I) *sont suffisantes.* — En d'autres termes, si elles sont remplies, on pourra trouver une droite telle que chacun de ses points (x_1, y_1, z_1) soit le centre d'une sphère dont les intersections avec la surface (1) soient situées dans deux plans parallèles, et si

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=\mathrm{R}^2$$

est l'équation d'une de ces sphères, l'équation des deux plans parallèles d'intersection sera

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{A}x^2+\mathrm{A}'y^2+\mathrm{A}''z^2+2\mathrm{B}yz+2\mathrm{B}'zx+2\mathrm{B}''xy\\ &\quad+2\mathrm{C}x+2\mathrm{C}'y+2\mathrm{C}''z+\mathrm{D}\\ &\quad-s[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2-\mathrm{R}^2]=0.\end{aligned}\right.$$

En effet, la surface que représente l'équation (5) se réduira à deux plans parallèles, si elle admet une infinité de centres situés dans un même plan, c'est-à-dire si les trois équations

$$\begin{aligned} \mathrm{A}x+\mathrm{B}''y+\mathrm{B}'z+\mathrm{C}-s(x-x_1)&=0,\\ \mathrm{B}''x+\mathrm{A}'y+\mathrm{B}z+\mathrm{C}'-s(y-y_1)&=0,\\ \mathrm{B}'x+\mathrm{B}y+\mathrm{A}''z+\mathrm{C}''-s(z-z_1)&=0,\end{aligned}$$

qui déterminent les coordonnées du centre, se réduisent à une seule. Or, si nous remplaçons dans ces équations $\mathrm{A}-s$, $\mathrm{A}'-s$, $\mathrm{A}''-s$ par leurs valeurs $\frac{\mathrm{B}'\mathrm{B}''}{\mathrm{B}}$, $\frac{\mathrm{B}''\mathrm{B}}{\mathrm{B}'}$, $\frac{\mathrm{B}\mathrm{B}'}{\mathrm{B}''}$ tirées des relations (I), elles deviennent

$$\frac{\mathrm{B}'\mathrm{B}''}{\mathrm{B}}x+\mathrm{B}''y+\mathrm{B}'z+sx_1+\mathrm{C}=0,$$

$$\mathrm{B}''x+\frac{\mathrm{B}''\mathrm{B}}{\mathrm{B}'}y+\mathrm{B}z+sy_1+\mathrm{C}'=0,$$

$$\mathrm{B}'x+\mathrm{B}y+\frac{\mathrm{B}\mathrm{B}'}{\mathrm{B}''}z+sz_1+\mathrm{C}''=0,$$

ou bien

$$B'B''x + B''By + BB'z + B(sx_1 + C) = 0,$$
$$B'B''x + B''By + BB'z + B'(sy_1 + C') = 0,$$
$$B'B''x + B''By + BB'z + B''(sz_1 + C'') = 0;$$

et celles-ci seront identiques, si l'on a

$$B(sx_1 + C) = B'(sy_1 + C') = B''(sz_1 + C''),$$

c'est-à-dire si le centre (x_1, y_1, z_1) de la sphère d'intersection appartient à la droite

$$\text{(III)} \qquad B(sx + C) = B'(sy + C') = B''(sz + C'').$$

Donc, *si les conditions* (I) *sont remplies, l'équation* (1) *représentera une surface de révolution autour de la droite* (III).

4. *Équation de l'axe de révolution.* — Les équations (III) sont celles de l'axe de révolution. On peut leur donner une autre forme. Mettons-y, en effet, à la place de s, les trois valeurs respectives (I), elles deviendront

$$\text{(IV)} \quad \left\{ \begin{aligned} (AB - B'B'')x + BC &= (A'B' - B''B)y + B'C' \\ &= (A''B'' - BB')z + B''C''. \end{aligned} \right.$$

Si nous ajoutons à tous les membres de ces égalités la même quantité $B'B''x + B''By + BB'z$, elles pourront s'écrire

$$\begin{aligned} B(Ax + B''y + B'z + C) &= B'(B''x + A'y + Bz + C') \\ &= B''(B'x + By + A''z + C''), \end{aligned}$$

ou bien

$$\text{(V)} \qquad Bf'_x = B'f'_y = B''f'_z.$$

Telle est la *forme implicite des équations de l'axe dans les surfaces de révolution du second degré.*

5. *Équation du plan de l'équateur.* — Soient λ, μ, ν les cosinus des angles d'inclinaison de l'axe de révolution sur les axes de coordonnées; le plan principal perpendiculaire à l'axe sera représenté par

$$\lambda f'_x + \mu f'_y + \nu f'_z = 0.$$

Or, en vertu de (III), ces cosinus sont proportionnels aux inverses $\frac{1}{B}$, $\frac{1}{B'}$, $\frac{1}{B''}$; par conséquent, l'équation du plan de l'équateur sera

$$\text{(VI)} \qquad \frac{f'_x}{B} + \frac{f'_y}{B'} + \frac{f'_z}{B''} = 0.$$

6. *Équation développée du plan de l'équateur.* — Remplaçons dans (VI) les dérivées par leurs développements, et ordonnons par rapport à x, y, z; nous aurons

$$\frac{x}{B}\left(A + \frac{B''B}{B'} + \frac{BB'}{B''}\right) + \frac{y}{B'}\left(A' + \frac{BB'}{B''} + \frac{B'B''}{B}\right)$$
$$+ \frac{z}{B''}\left(A'' + \frac{B'B''}{B} + \frac{B''B}{B'}\right) + \left(\frac{C}{B} + \frac{C'}{B'} + \frac{C''}{B''}\right) = 0,$$

et, par suite des relations (II),

$$\text{(VII)} \qquad S\left(\frac{x}{B} + \frac{y}{B'} + \frac{z}{B''}\right) + \left(\frac{C}{B} + \frac{C'}{B'} + \frac{C''}{B''}\right) = 0.$$

Telle est l'équation du plan équatorial. Elle peut encore se mettre sous la forme

$$\text{(VIII)} \qquad \frac{Sx + C}{B} + \frac{Sy + C'}{B'} + \frac{Sz + C''}{B''} = 0,$$

qui présente une certaine analogie avec les équations (III) de l'axe de révolution.

7. *Équation générale des plans méridiens.* — Ces

plans, passant par l'axe, sont représentés par l'équation

$$\text{(IX)} \qquad B f'_x + m B' f'_y - (1 + m) B'' f'_z = 0,$$

ou encore par

$$\text{(X)} \quad B(sx + C) + mB'(sy + C') - (1 + m)B''(sz + C'') = 0.$$

8. *Séparation des surfaces de révolution du second degré.* — La surface de révolution que représente l'équation (1) sera un ellipsoïde ou un hyperboloïde, un paraboloïde ou un cylindre, suivant qu'elle admettra un seul plan équatorial situé à une distance finie, un seul plan équatorial rejeté à l'infini, ou une infinité de plans équatoriaux parallèles. Donc

Lorsque la surface du second degré (1) *est de révolution, son équation représentera*

1° *Un ellipsoïde ou un hyperboloïde, si les quantités égales*

$$S = A + \frac{B''B}{B'} + \frac{BB'}{B''} = A' + \frac{BB'}{B''} + \frac{B'B''}{B}$$
$$= A'' + \frac{B'B''}{B} + \frac{B''B}{B'}$$

sont différentes de zéro ;

2° *Un paraboloïde, si ces mêmes quantités sont égales à zéro, pendant que la quantité* $\frac{C}{B} + \frac{C'}{B'} + \frac{C''}{B''}$ *est différente de zéro ;*

3° *Un cylindre,* si les quantités S et $\frac{C}{B} + \frac{C'}{B'} + \frac{C''}{B''}$ sont toutes égales à zéro.

PREMIER CAS PARTICULIER.

L'un des trois coefficients B, B', B'' *est nul.*

9. Supposons que l'un des trois rectangles des variables manque dans l'équation de la surface, celui de yz

par exemple, de sorte que $B = 0$. Les trois équations en s, α, β, γ du n° 1 se réduisent à

$$\begin{aligned}(A - s)\alpha + B''\beta + B'\gamma &= 0,\\ B''\alpha + (A' - s)\beta &= 0,\\ B'\alpha + (A'' - s)\gamma &= 0.\end{aligned}$$

Éliminons α entre la première de ces équations et chacune des deux autres ; nous obtenons les égalités

$$\begin{aligned}[B''^2 - (A - s)(A' - s)]\beta + B'B''\gamma &= 0,\\ [B'^2 - (A'' - s)(A - s)]\gamma + B'B''\beta &= 0,\end{aligned}$$

qui, devant avoir lieu pour une infinité de valeurs de β et γ, exigent que l'on ait à la fois

$$(6)\quad B''^2 - (A - s)(A' - s) = 0,\ B'^2 - (A'' - s)(A - s) = 0,\ B'B'' = 0.$$

La dernière condition n'est satisfaite que si l'un des deux autres coefficients B', B'' est nul. Donc

Pour qu'une équation du second degré, qui ne contient pas à la fois les trois rectangles des variables, représente une surface de révolution, il faut que deux de ces rectangles manquent dans l'équation.

10. Admettons que B' soit nul en même temps que B. Les deux premières des relations de condition (6) seront

$$B''^2 = (A - s)(A' - s), \quad (A'' - s)(A - s) = 0.$$

La première de ces égalités exige que s soit différent de A, de sorte que la seconde ne saurait être satisfaite que par $s = A''$. On a ainsi

$$\text{(XI)}\quad B''^2 = (A - A'')(A' - A'') = (A'' - A')(A'' - A').$$

Donc, *pour qu'une équation du second degré, qui ne contient que l'un des rectangles des variables, re-*

présente une surface de révolution, il faut que le demi-coefficient de ce rectangle soit moyen proportionnel entre les deux excès du coefficient qui affecte le carré de la variable absente dans ce rectangle, sur les coefficients des carrés des deux autres variables.

11. *Ces conditions sont suffisantes,* c'est-à-dire que l'équation (1) représentera une surface de révolution, si l'on a

$$(7) \qquad B = 0, \quad B' = 0, \quad B''^2 = (A'' - A)(A'' - A').$$

Dans ce cas, les équations du n° 3, qui déterminent le centre de la surface (5) passant par l'intersection de la surface du second degré (1) et de notre sphère, seront

$$\begin{aligned} (A - A'')x + B''y + A''x_1 + C &= 0, \\ B''x + (A' - A'')y + A''y_1 + C' &= 0, \\ A''z_1 + C'' &= 0. \end{aligned}$$

Les deux premières peuvent être remplacées par

$$\begin{aligned} &B''(A - A'')x + B''^2 y + B''(A''x_1 + C) = 0, \\ &B''(A - A'')x + (A - A'')(A' - A'')y + (A - A'')(A''y_1 + C'') = 0. \end{aligned}$$

On voit par (XI) que ces trois équations seront identiquement satisfaites et se réduiront à une seule, si l'on a

$$A''z_1 + C'' = 0, \quad B''(A''x_1 + C) = (A - A'')(A''y_1 + C'),$$

c'est-à-dire si le centre de la sphère d'intersection appartient à la droite

$$(\mathrm{XII}) \qquad \frac{A''x + C}{A - A''} = \frac{A''y + C'}{B''}, \quad A''z + C'' = 0.$$

Donc *l'équation* (1) *représente une surface de révolution autour de la droite* (XII).

En vertu de la relation (XI), les *équations de l'axe de révolution* seront

$$\text{(XIII)}\quad \frac{A''x + C}{A''y + C'} = \pm\sqrt{\frac{A - A''}{A' - A''}},\quad A''z + C'' = o,$$

suivant que B″ sera positif ou négatif. *Cet axe est parallèle au plan des xy.*

12. *Nature de la surface de révolution.* — Les coordonnées *a*, *b*, *c* du centre de la surface seront fournies par le système des équations

$$\begin{aligned} Ax + B''y + C &= o,\\ B''x + A'y + C' &= o,\\ A''z + C'' &= o, \end{aligned}$$

qui donnent, eu égard à (XI),

$$\text{(XIV)}\quad a = \frac{B''C' - A'C}{A''(A + A' - A'')},\quad b = \frac{B''C - AC'}{A''(A + A' - A'')},\quad c = -\frac{C''}{A''}.$$

Ces valeurs sont finies, tant que A″ est différent de A + A′; dans ce cas, la surface est un *ellipsoïde*, un *hyperboloïde* ou un *cône de révolution,* et l'*équation du plan équatorial,* parallèle à l'axe des *z*, est

$$\text{(XV)}\quad x\sqrt{A - A''} \pm y\sqrt{A' - A''} + \frac{C\sqrt{A - A''} \pm C'\sqrt{A' - A''}}{A + A' - A''} = o.$$

Si l'on a $A + A' = A''$, ce qui donne $B''^2 = AA'$, la surface sera toujours un *paraboloïde de révolution.*

Si l'on a en même temps

$$A + A' = A'',\quad C\sqrt{A'} + C'\sqrt{A} = o,$$

la surface sera un *cylindre de révolution.*

Nous n'avons pas examiné le cas où, avec $B = o$, $B' = o$, $B''^2 = (A - A'')(A' - A'')$, on aurait en même temps $A'' = 0$; car, dans ce cas, l'équation de la surface se réduirait à

$$(x\sqrt{A} \pm y\sqrt{A'})^2 + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0,$$

et représenterait un cylindre parabolique.

DEUXIÈME CAS PARTICULIER.

Les trois coefficients B, B′, B″ *sont nuls.*

13. L'équation de la surface sera

$$(8)\quad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0,$$

et ne pourra exprimer une surface de révolution que si deux des trois coefficients A, A′, A″ sont égaux. Supposons $A = A'$. L'équation (8) pourra s'écrire

$$\frac{1}{A}(Ax + C)^2 + \frac{1}{A'}(Ay + C')^2 + \frac{1}{A''}(A''z + C'')^2 - \left(\frac{C^2 + C'^2}{A} + \frac{C''^2}{A''}\right) + D = 0.$$

Elle représentera toujours une surface de révolution.

1° Pour $A'' > 0$, cette surface sera un *ellipsoïde réel*, un *point* ou un *ellipsoïde imaginaire*, suivant que le terme D, indépendant des variables, sera inférieur, égal ou supérieur à $\dfrac{C^2 + C'^2}{A} + \dfrac{C''^2}{A''}$.

2° Pour $A'' < 0$, elle sera un *hyperboloïde à une nappe*, un *cône* ou un *hyperboloïde à deux nappes*, suivant que D est inférieur, égal ou supérieur à

$$\frac{C^2 + C'^2}{A} + \frac{C''^2}{A''}.$$

3° Si A$''$ est nul et C$''$ diffèrent de zéro, la surface de révolution est un *paraboloïde*.

4° Enfin, pour $A''=0$, $C''=0$, elle est un *cylindre réel*, une *droite* ou un *cylindre imaginaire*, suivant que D sera inférieur, égal ou supérieur à $\frac{C^2+C'^2}{A}$.