NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. MISTER

Sur l'hyperboloïde de révolution

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 11 (1872), p. 352-353

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__352_0>

SUR L'HYPERBOLOÏDE DE RÉVOLUTION;

PAR M. J. MISTER,
Répétiteur d'Analyse à l'École du Génie civil de Belgique.

Démontrer géométriquement qu'étant données deux droites non situées dans un même plan, si l'une d'elles tourne autour de l'autre, elle engendre un hyperboloïde de révolution, c'est-à-dire une surface dont la courbe méridienne est une hyperbole.

M. Morel (*voir* 2e série, t. VIII, p. 273) s'est déjà occupé de cette question; mais la démonstration qu'il en a donnée suppose connues les principales propriétés de cette surface; elle s'appuie en outre sur un théorème qui n'a été établi que par le secours du calcul intégral. Sa démonstration est donc loin d'être élémentaire et géométrique. Nous croyons qu'on peut lui substituer avantageusement la suivante, qui ne suppose connue aucune des propriétés de l'hyperbole ou de l'hyperboloïde, et qui se fonde simplement sur la définition géométrique de cette courbe.

Soit OA (*) la plus courte distance entre les deux droites. Pendant la rotation, cette droite décrira le cercle de gorge dont nous représenterons le rayon par r. Considérons la droite AM dans une position quelconque; soit ZOX le plan du méridien et M l'intersection de la droite avec ce méridien; abaissons MP perpendiculaire sur OX, la droite AM se projettera sur le plan de cercle de gorge, suivant la droite AP tangente au cercle. Soit

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

α l'inclinaison constante de la droite AM sur le plan du cercle de gorge; tirons la droite OC faisant avec OX l'angle α, et menons CF, C'F' tangentes au cercle. Joignons ensuite le point M aux deux points F et F' ainsi obtenus. Les propriétés élémentaires des triangles rectangles OAP, OCF, MAP donneront ·

$$\overline{\mathrm{MF}}^2 = \overline{\mathrm{MP}}^2 + \overline{\mathrm{FP}}^2, \tag{1}$$

$$\mathrm{MP} = \mathrm{AP}\,\mathrm{tang}\,\alpha = \sqrt{\overline{\mathrm{OP}}^2 - r^2}\,\mathrm{tang}\,\alpha,$$

$$\mathrm{OF} = \frac{r}{\cos\alpha} \quad \text{et} \quad \mathrm{FP} = \mathrm{OP} - \mathrm{OF} = \mathrm{OP} - \frac{r}{\cos\alpha}.$$

Substituons dans l'égalité (1), elle devient

$$\overline{\mathrm{MF}}^2 = \left(\overline{\mathrm{OP}}^2 - r^2\right)\mathrm{tang}^2\alpha + \overline{\mathrm{OP}}^2 + \frac{r^2}{\cos^2\alpha} - \frac{2\,\mathrm{OP}.r}{\cos\alpha},$$

ou

$$\overline{\mathrm{MF}}^2 = \frac{\overline{\mathrm{OP}}^2}{\cos^2\alpha} + r^2 - \frac{2\,\mathrm{OP}.r}{\cos\alpha} = \left(\frac{\mathrm{OP}}{\cos\alpha} - r\right)^2,$$

et, par suite,

$$\mathrm{MF} = \frac{\mathrm{OP}}{\cos\alpha} - r.$$

On aurait de même

$$\mathrm{MF'} = \frac{\mathrm{OP}}{\cos\alpha} + r.$$

On en déduit

$$\mathrm{MF'} - \mathrm{MF} = 2r.$$

Le lieu des points M est donc une hyperbole dont F et F' sont les foyers, et dont l'axe transverse est égal à $2r$.
