Nouvelles annales de mathématiques

Laguerre

Recherches analytiques sur la surface du troisième ordre qui est la réciproque de la surface de Steiner

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 11 (1872), p. 337-347

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__337_0>

RECHERCHES ANALYTIQUES

sur la surface du troisième ordre qui est la réciproque de la surface de Steiner

(suite, voir même tome, p. 319);

PAR M. LAGUERRE.

II. — *Propriétés des lignes asymptotiques.*

9. Considérons une ligne asymptotique quelconque Z de la surface $\mathcal{K}$; cette ligne est l'arête de rebroussement de la surface enveloppée par le plan dont l'équation est

$$u = at^4 + 4bt^3\tau + 6ct^2\tau^2 + 4dt\tau^3 + e\tau^4 = 0,$$

$t:\tau$ désignant un paramètre variable.

Lorsqu'on donne à ce paramètre une valeur déterminée, l'équation précédente représente un plan osculateur de Z et tangent à $\mathcal{K}$, que j'appellerai simplement plan (t). J'appellerai tangente (t) la tangente à Z au point où le plan (t) lui est osculateur; ses équations sont

$$\frac{du}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{du}{d\tau} = 0.$$

Enfin j'appellerai point (t) le point de contact de cette tangente; ses équations sont

$$\begin{aligned}
at^2 + 2bt\tau + c\tau^2 &= 0,\\
bt^2 + 2ct\tau + d\tau^2 &= 0,\\
ct^2 + 2dt\tau + e\tau^2 &= 0.
\end{aligned}$$

Je dirai indifféremment que $t:\tau$ (ou t) est le paramètre de ce point, de la tangente en ce point à l'asymptotique et du plan osculateur dont cette tangente est la caractéristique.

Les relations précédentes et l'équation (1) permettent d'exprimer les coordonnées d'un point quelconque de Z en fonction de son paramètre; on obtient ainsi le tableau suivant :

Tableau B.

$$\begin{aligned}
a &= -4\alpha t^3\tau^3 - 12\beta t^2\tau^4 - 12\gamma t\tau^5 - 4\delta\tau^6,\\
b &= 3\alpha t^4\tau^2 + 8\beta t^3\tau^3 + 6\gamma t^2\tau^4 - \varepsilon\tau^6,\\
c &= -2\alpha t^5\tau - 4\beta t^4\tau^2 + 4\delta t^2\tau^4 + 2\varepsilon t\tau^5,\\
d &= \alpha t^6 - 6\gamma t^4\tau^2 - 8\delta t^3\tau^3 - 3\varepsilon t^2\tau^4,\\
e &= 4\beta t^6 + 12\gamma t^5\tau + 12\delta t^4\tau^2 + 4\varepsilon t^3\tau^3.
\end{aligned}$$

10. Étant donné un point M, dont les coordonnées soient a', b', c', d' et e', posons pour un instant

$$\begin{vmatrix} a+\lambda a' & b+\lambda b' & c+\lambda c' \\ b+\lambda b' & c+\lambda c' & d+\lambda d' \\ c+\lambda c' & d+\lambda d' & e+\lambda e' \end{vmatrix} = j + \lambda j_0 + \lambda^3 j' + \lambda^3 j' \; (^*);$$

d'après la méthode donnée par Joachimsthal, on obtient l'équation du cône circonscrit à $\mathcal{H}$, et ayant pour sommet le point M, en égalant à zéro le discriminant de la forme cubique contenue dans le second membre de l'égalité précédente. Si le point M est sur Z, on a

$$j' = 0,$$

et l'équation du cône circonscrit devient

$$j_0^2 - 4jj'_0 = 0.$$

On peut dans cette équation exprimer, en employant les formules du tableau B, les coordonnées du point M en

(*) Pour éviter toute confusion, je ferai remarquer qu'ici j_0, j'_0, j n'ont pas le même sens que dans le paragraphe précédent.

fonction de son paramètre t, et je ferai remarquer qu'*a-près la substitution les invariants* j_0, j, j'_0 *deviendront des covariants des formes u et* ω.

Comme un covariant est déterminé par son terme du degré le plus élevé en t, il me suffira, pour calculer chacun des covariants dont je viens de parler, de supposer a', b' et c' égaux à zéro, et de remplacer respectivement d' et e' par αt^6 et $4\beta t^6$. Il viendra ainsi

$$j_0 = [4\beta(ac - b^2) - 2\alpha(ad - bc)]t^6 + \ldots;$$

d'où l'on voit que j_0 est égal à $-2J_0$, J_0 désignant le jacobien de ω et du hessien de u, en sorte que

$$J_0 = [\alpha(ad - bc) - 2\beta(ac - b^2)]t^6 + \ldots.$$

On obtient de même

$$j'_0 = -a\alpha^2 u'^2 + \ldots,$$

d'où

$$j'_0 = -\omega^2 u;$$

par suite, l'équation du cône circonscrit à $\mathfrak{K}$ et ayant pour sommet le point (t) est

$$J_0^2 + \omega^2 ju = 0.$$

11. Le coefficient du terme le plus élevé dans le covariant $J_0^2 + \omega^2 ju$ est

$$t^{12}\{[\alpha(ad - bc) - 2\beta(ac - b^2)]^2 + a\alpha^2(ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3)\},$$

ou, en effectuant les calculs,

$$t^{12}(ac - b^2)[\alpha^2(ae - c^2) - 4\alpha\beta(ad - bc) + 4\beta^2(ac - b^2)].$$

Si l'on désigne par H le hessien de u et par G le covariant

$$[\alpha^2(bd - c^2) - \alpha\beta(ad - bc) + \beta^2(\alpha\gamma - \beta^2)]t^8 + \ldots,$$

on voit que l'on a identiquement

$$J_0^2 + \omega^2 j u = H(\omega^2 i + 4G);$$

d'où il suit que le cône circonscrit se décompose en deux cônes du second ordre, *propriété caractéristique de la surface réciproque de la surface de Steiner* (*).

Remarque. — Les deux cônes ainsi obtenus se distinguent très-nettement par la forme de leur équation; je dirai que le cône dont l'équation est

$$H = 0$$

appartient à l'asymptotique Z, et je le désignerai par la notation $\mathfrak{H}_t$; il est clair que le second cône *appartient* à la deuxième ligne asymptotique qui passe par le point (t).

12. Soient (t) et (t') deux points de l'asymptotique Z; considérons le premier émanant de u,

$$(8)\qquad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{C} = {} & t(at'^3 + 3bt'^2\tau' + 3ct'\tau'^2 + d\tau'^3) \\ & + \tau(bt'^3 + 3ct'^2\tau' + 3dt'\tau'^2 + e\tau'^3). \end{aligned} \right.$$

L'équation $\mathfrak{C} = 0$ représente un plan passant évidemment par la tangente (t'); si, laissant le point (t) fixe, on fait varier le point (t'), ce plan enveloppe une surface du quatrième ordre ayant pour arête de rebroussement une cubique gauche.

L'équation de cette surface s'obtient en égalant à zéro le discriminant de $\mathfrak{C}$ (par rapport à t' et τ'); comme ce discriminant est un covariant de u et de ω, il suffit de cal-

(*) Sur la surface de Steiner, *voir* Borchardt, t. LXIII : Cremona, *Sur la surface du quatrième ordre*, etc., p. 315 et suiv. — Borchardt, t. LXIV : Kummer, *Ueber die Flächen des vierten Grades;* Weierstrass, *Note zur vorstehenden Abhandlung;* Schröter, *Ueber die Steiner'sche Fläche.*

culer son terme du degré le plus élevé qui est

$$[4(ac - b^2)(bd - c^2) - (ad - bc)^2]t^4,$$

ou encore

$$[aj - (ac - b^2)i]t^4.$$

L'équation de la surface développable, que j'appellerai Σ_t, est donc

$$ju - i\mathrm{H} = 0.$$

13. Pour tous les points de l'arête de rebroussement de Σ_t, on doit avoir

$$\frac{at + b\tau}{bt + c\tau} = \frac{bt + c\tau}{ct + d\tau} = \frac{ct + d\tau}{dt + e\tau},$$

ou encore

$$(9)\quad \begin{cases} (ac - b^2)t^2 + (ad - bc)t\tau + (bd - c^2)\tau^2 = 0, \\ (ad - bc)t^2 + (ac - c^2)t\tau + (be - dc)\tau^2 = 0, \\ (bd - c^2)t^2 + (be - cd)t\tau + (ce - d^2)\tau^2 = 0. \end{cases}$$

Le déterminant de ces trois équations est égal à j^2, ainsi qu'il est facile de le vérifier; comme il est nul par les points de la courbe, il en résulte qu'elle est située sur la surface $\mathcal{K}$.

Elle est également située sur le cône $\mathfrak{S}_t$; l'équation de ce cône peut en effet se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} &t^2[(ac - b^2)t^2 + (ad - bc)t\tau + (bd - c^2)\tau^2] \\ &\quad + t\tau[(ad - bc)t^2 + (ac - c^2)t\tau + (be - cd)\tau^2] \\ &\quad + \tau^2[(bd - c^2)t^2 + (bc - cd)t\tau + (ce - d^2)\tau^2] = 0. \end{aligned}$$

D'où cette conclusion :

L'arête de rebroussement de la développable Σ_t est la cubique gauche, suivant laquelle la surface $\mathcal{K}$ est touchée par le cône circonscrit à la surface, apparte-

nant à l'asymptotique Z, *et ayant pour sommet le point* (t).

De là on déduira facilement les propositions suivantes :

THÉORÈME I. — *Les cônes du second degré circonscrits à* $\mathcal{K}$, *ayant leur sommet sur une ligne asymptotique* Z *de cette surface et appartenant à cette ligne asymptotique, touchent* $\mathcal{K}$ *suivant des cubiques gauches. Les surfaces développables, dont ces cubiques sont les arêtes de rebroussement, coupent* $\mathcal{K}$ *suivant la ligne* Z.

THÉORÈME II. — *Étant pris un point* M *sur la surface* $\mathcal{K}$, *le cône, circonscrit à la surface et dont ce point est le sommet, se compose de deux cônes du second ordre. Chacun d'eux touche* $\mathcal{K}$ *suivant une cubique gauche; les surfaces développables, dont ces cubiques sont les arêtes de rebroussement, coupent* $\mathcal{K}$ *suivant les deux lignes asymptotiques qui se croisent au point* M.

14. Les cônes du second degré circonscrits à $\mathcal{K}$ et qui *appartiennent* à l'asymptotique Z touchent cette surface suivant des cubiques gauches que je dirai aussi appartenir à l'asymptotique.

Toutes les cubiques appartenant à cette asymptotique passent par les quatre points satisfaisant aux équations

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e};$$

ces points sont d'ailleurs les points de rebroussement de l'asymptotique et les points coniques de $\mathcal{K}$; leurs paramètres sont les racines de l'équation $\omega = 0$.

Indépendamment de ces quatre points, deux cubiques appartenant a l'asymptotique Z se coupent en un cinquième point.

Ce point est le sommet d'un cône du second degré qui contient les deux cubiques.

Pour démontrer cette proposition, je m'appuierai sur le lemme suivant que l'on établira facilement :

Une surface développable du quatrième ordre (ayant pour arête de rebroussement une cubique gauche) étant considérée comme l'enveloppe d'un plan mobile

$$f(\lambda) = 0,$$

$f(\lambda)$ désignant un polynôme du troisième degré en λ, les différents cônes du second ordre qui passent par l'arête de rebroussement sont donnés par l'équation que l'on obtient en égalant à zéro le covariant quadratique de $f(\lambda)$.

Cela posé, la cubique gauche, suivant laquelle la surface $\mathcal{H}$ est touchée par le cône du second ordre ayant le point (t) pour sommet et appartenant à l'asymptotique Z, est l'enveloppe du plan mobile défini par l'équation (8) (t' étant considérée comme la variable). L'équation générale des cônes du second ordre passant par cette cubique sera donc, en vertu du lemme précédent,

$$\begin{vmatrix} at + b\tau & bt + c\tau & ct + d\tau \\ bt + c\tau & ct + d\tau & dt + e\tau \\ t'^2 & -t'\tau' & t'^2 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en effectuant les calculs,

$$(10) \left\{ \begin{aligned} & t'^2[(ac - b^2)t^2 + (ad - bc)t\tau + (bd - c^2)\tau^2] \\ & \quad + t'\tau'(ad - bc)t^2 + (ae - c^2)t\tau + (be - cd)\tau^2] \\ & \quad - t'^2[(bd - c^2)t^2 + (be - cd)t\tau + (ce - d^2)\tau^2] = 0. \end{aligned} \right.$$

Je remarque maintenant que cette équation est symétrique par rapport à t et t'; d'où les propositions suivantes :

THÉORÈME III. — *Si de deux points* (t) *et* (t') *situés sur l'asymptotique* Z, *on mène les cônes du second ordre circonscrits à* $\mathcal{H}$ *et appartenant à cette asymptotique, les deux cubiques gauches de contact sont situées sur un même cône du second ordre, dont le sommet est le point d'intersection des deux cubiques distinct des quatre points nodaux de* $\mathcal{H}$.

Remarque. — Ce cône est défini par l'équation (10).

THÉORÈME IV. — *Étant donnée une cubique quelconque passant par les quatre points coniques de* $\mathcal{H}$, *la surface développable, dont cette cubique est l'arête de rebroussement, coupe* $\mathcal{H}$ *suivant une de ses lignes asymptotiques* Z.

Si l'on considère les divers cônes du second degré qui contiennent cette cubique, ils coupent $\mathcal{H}$ *suivant les diverses cubiques appartenant à* Z, *en sorte que les développables dont elles sont les arêtes de rebroussement contiennent toutes* Z, *et que les développables circonscrites à* $\mathcal{H}$ *le long de ces cubiques sont des cônes du second ordre dont les sommets sont situés sur* Z.

15. Il est facile d'étendre les résultats précédents à une asymptotique quelconque Z_ρ résultant de l'intersection de $\mathcal{H}$ avec la quadrique

$$\theta^2 i + 2\rho\theta h + \rho^2 k = 0.$$

A cet effet, j'établirai d'abord une formule très-simple et que j'aurai souvent occasion d'employer.

Soit, en conservant les notations du § I, le système linéaire gauche

$$U = \begin{matrix} 0 & t^2 & t\tau \\ -t^2 & 0 & \tau^2, \\ -t\tau & -\tau^2 & 0 \end{matrix}$$

d'où

$$U_0 = \begin{matrix} \tau^2 & 0 & 0 \\ -t\tau & 0 & 0 \\ t^2 & 0 & 0 \end{matrix} \times \begin{matrix} \tau^2 & -t\tau & t^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix};$$

le produit HUH_1 est aussi un système gauche que je ferai égal à (*)

$$V = \begin{matrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{matrix},$$

en sorte que l'on aura

$$V_0 = \begin{matrix} z & 0 & 0 \\ -y & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \end{matrix} \times \begin{matrix} z & -y & x \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix},$$

et par suite

$$H_{01} \times \begin{matrix} \tau^2 \\ -t\tau \\ t^2 \end{matrix} = \begin{matrix} z \\ -y. \\ x \end{matrix}$$

De l'équation (4) on déduit

$$H(I + U)H_1 = \rho A + \theta I + V,$$

d'où

$$\Delta(I + U) = \Delta(\rho A + \theta I + V).$$

Représentons, pour abréger, par $\varphi(x, y, z)$ la forme quadratique

$$\alpha x^2 + 4\gamma y^2 + \varepsilon z^2 + 4\delta zy + 4\beta yx + 2\gamma xz;$$

en développant la relation précédente, on obtiendra l'équation

$$(11) \qquad \rho\varphi(x, y, z) + 2\theta(xz - y^2) = 0,$$

en sorte que, quand le rapport $t : \tau$ prend toutes les va-

(*) Il est important de ne pas confondre ici le système linéaire H avec le hessien de u que j'ai designe par la même lettre.

leurs possibles, les variables x, y, z restent constamment liées par la relation (11).

16. Cela posé, d'après ce que j'ai démontré plus haut, l'équation générale des cônes circonscrits appartenant à l'asymptotique Z s'obtient en égalant à zéro le hessien de u; on peut donc l'écrire de la façon suivante :

$$\begin{vmatrix} a & b & c & & \tau^4 & -\tau^3 t & \tau^2 t^2 \\ b & c & d & + & -\tau^3 t & \tau^2 t^2 & -\tau t^3 \\ c & d & e & & \tau^2 t^2 & -\tau t^3 & t^4 \end{vmatrix} = 0,$$

ou simplement

$$\Delta(A + U_0) = 0.$$

Les cônes circonscrits appartenant à l'asymptotique Z_0 auront par suite pour équation

$$\Delta(A' + U_0) = \Delta(H_1 A H + U_0) = \Delta(A + H_{10} U_0 H_0) = 0,$$

ou encore

$$\Delta(A + V_0) = 0,$$

ou enfin en développant

$$f = (ac - b^2)x^2 + (ae - c^2)y^2 + (ce - d^2)$$
$$+ 2(be - cd)yz + 2(bd - c^2)zx + 2(ad - bc)xy = 0.$$

Telle est l'équation générale des cônes du second ordre circonscrits à $\mathfrak{H}$ et appartenant à l'asymptotique Z_ρ, les variables x, y, z étant assujetties à satisfaire à l'équation (11).

17. L'équation générale des cônes du second ordre qui contiennent les cubiques gauches appartenant à l'asymptotique Z (Cf, n° 14) peut se mettre sous la forme

$$\Delta \left\{ A + \begin{matrix} \tau^2 & 0 & 0 \\ -\tau t & 0 & 0 \\ t^2 & 0 & 0 \end{matrix} \times \begin{matrix} \tau'^2 & -\tau' t' & t'^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\} = 0.$$

L'équation analogue pour les cubiques appartenant à l'asymptotique Z_ρ sera

$$\Delta\left[H_1 AH + \begin{matrix} \tau^2 & 0 & 0 \\ -\tau t & 0 & 0 \\ t^2 & 0 & 0 \end{matrix} \times \begin{matrix} \tau'^2 & -\tau' t' & t'^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right]$$

$$= \Delta\left\{A + H_{01} \begin{matrix} \tau^2 & 0 & 0 \\ -\tau t & 0 & 0 \\ t^2 & 0 & 0 \end{matrix} \times \begin{matrix} \tau'^2 & -\tau' t' & t'^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \times H_0\right\},$$

ou encore, en vertu des relations que j'ai établies plus haut,

$$\Delta\left\{A + \begin{matrix} z & 0 & 0 \\ -y & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \end{matrix} \times \begin{matrix} z' & -y' & x' \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right\} = 0.$$

D'où la conclusion suivante :

Si l'on désigne par x, y, z et x', y', z' deux systèmes de variables satisfaisant respectivement à l'équation (11), *l'équation générale des cônes du second ordre qui contiennent les cubiques appartenant à l'asymptotique Z_ρ est*

$$x'\frac{df}{dx} + y'\frac{df}{dy} + z'\frac{df}{dz} = 0.$$

Je désigne ici par f la même forme quadratique que dans le numéro précédent.

Les équations des cubiques gauches elles-mêmes sont

$$(ac - b^2)x + (ad - bc)y + (bd - c^2)z = 0,$$
$$(ad - bc)x + (ae - c^2)y + (be - cd)z = 0,$$
$$(bd - c^2)x + (be - cd)y + (ce - d^2)z = 0.$$

(*La suite prochainement.*)