NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 11 (1872), p. 329-336

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__329_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 385

(voir 1re série, t. XVI, p. 183),

PAR M. H. BROCARD.

Trouver l'équation de l'enveloppe de la droite qui joint les extrémités des deux aiguilles d'une montre ordinaire.

La question proposée revient évidemment à la suivante : Deux mobiles B, C, partant d'un point A d'une circonférence OA de rayon a, parcourent cette circonférence dans le même sens. L'un d'eux se meut douze fois plus vite que l'autre. Trouver l'enveloppe de la droite BC qui les joint.

Les coordonnées des deux points B et C, rapportés à un système d'axes rectangulaires YOA, ont pour valeurs

$$x = \cos\omega, \qquad y = \sin\omega,$$
$$x = a\cos 12\omega, \quad y = a\sin 12\omega,$$

ω désignant l'angle $\widehat{BOA}$.

L'équation de la droite BC est alors

$$(1)\qquad x\cos\frac{13}{2}\omega + y\sin\frac{13}{2}\omega = a\cos\frac{11}{2}\omega.$$

L'élimination de ω entre cette équation et sa dérivée par rapport à ω,

$$(2)\qquad 13x\sin\frac{13}{2}\omega - 13y\cos\frac{13}{2}\omega = 11a\sin\frac{11}{2}\omega,$$

conduira, comme on sait, à l'équation de l'enveloppe cherchée.

Or les valeurs de x et de y que l'on en tire ont pour expressions

$$x = \frac{12}{13} a \cos\omega + \frac{a}{13} \cos 12\omega,$$

$$y = \frac{12}{13} a \sin\omega + \frac{a}{13} \sin 12\omega.$$

Ce sont précisément les coordonnées du point A de la circonférence de rayon $\frac{a}{13}$ roulant extérieurement sur la circonférence ayant O pour centre et $\frac{11}{13} a$ pour rayon. L'enveloppe cherchée est donc l'épicycloïde ou épitrochoïde engendrée de cette manière.

D'ailleurs, des équations (1) et (2) on tire

$$\cos^2 \frac{11}{2} \omega = \frac{13^2(x^2 + y^2) - 11^2 a^2}{48 a^2},$$

$$\sin^2 \frac{11}{2} \omega = \frac{13^2(a^2 - x^2 - y^2)}{48 a^2},$$

ce qui montre bien que la courbe est renfermée entre les deux circonférences concentriques

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{11 a}{13}\right)^2$$

et

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

L'enveloppe se compose de onze arcs égaux tangents, en leurs milieux, à la circonférence $x^2 + y^2 = a^2$. Ce sont les sommets de la courbe. Ils ont pour coordonnées polaires

$$\rho = a, \quad \omega = \frac{2k\pi}{11}.$$

Les points de rebroussement sont situés sur l'autre circonférence, et ont pour coordonnées polaires

$$\rho = \frac{11}{13}a, \quad \omega = \frac{(2k-1)}{11}\pi.$$

En ces points, la tangente passe par l'origine.

Nota. — On aurait pu supposer les points B et C, à l'origine du mouvement, sur la ligne OA et sur deux circonférences concentriques de rayons a et b. Ce cas général n'offre aucun intérêt, à cause de la complication des calculs.

Question 857

(voir 2^e^ série, t. VII, p. 189);

PAR M. ÉD. WEYR,
Étudiant à Prague.

D'un point M *situé dans le plan d'une courbe algébrique, on mène toutes les tangentes à cette courbe et une droite quelconque* MA. *Aux points de contact des tangentes issues de* M, *on construit les coniques ayant quatre points confondus sur la courbe et tangentes à* MA. *Si t désigne la distance comptée sur* MA *du point* M *au point de contact de l'une de ces coniques, et* R *le rayon de courbure de cette conique en ce point de contact, on a* $\sum \frac{R}{t^3} = 0$, *la somme s'étendant à toutes les coniques.* (A. RIBAUCOUR.)

Soient C, C′, C″,... les points de contact des tangentes issues du point M, et soient r, r', r'',... les rayons de courbure de la courbe algébrique en ces points. D'après un théorème de M. Mannheim (*voir* 2^e^ série, *Question* 745, t. VII, p. 181), on a

$$(1) \qquad \sum \frac{r}{\overline{MC}^3} = 0.$$

Soient C, 1, 2, 3 quatre points consécutifs de notre courbe et imaginons toutes les coniques qui passent par eux; on sait qu'il y en aura deux qui coupent une droite MA en deux points confondus. Mais le système des droites C1 et 23, ou bien la tangente MC comptée deux fois, constitue évidemment une de ces deux coniques, en sorte qu'il n'y aura qu'une seule conique proprement dite S qui passe par C, 1, 2, 3 et qui touche MA. Désignons par D le point de contact.

Ayant égard aux points C′, C″,..., on construira de la même manière les coniques S′, S″,... qui touchent MA en certains points D′, D″,..., ayant en C′, C″,... avec la courbe proposée un contact du troisième ordre.

Si l'on désigne par R, R′, R″,... les rayons de courbure des coniques S, S′, S″,... aux points respectifs D, D′, D″,..., on a à démontrer l'équation suivante

$$\sum \frac{R}{\overline{MD}^4} = 0.$$

Le théorème de M. Mannheim donne pour les coniques S, S′, S″,... les relations

$$\frac{r}{\overline{MC}^3} + \frac{R}{\overline{MD}^3} = 0, \quad \frac{r'}{\overline{MC'}^3} + \frac{R'}{\overline{MD'}^3} = 0, \ldots,$$

d'où l'on tire

$$\sum \frac{r}{\overline{MC}^3} + \sum \frac{R}{\overline{MD}^3} = 0,$$

ou bien, en vertu de l'équation (1),

$$(2) \qquad \sum \frac{R}{\overline{MD}^3} = 0.$$

Passons alors sur la droite MA du point M à un point infiniment rapproché M′, dont la distance à M soit δ. Si l'on mène du point M′ à la courbe algébrique toutes les tangentes, leurs points de contact Γ, Γ', Γ'',... seront voisins des points C, C′, C″,..., et puisque les coniques S, S′, S″,... passent par *quatre* points consécutifs de la courbe, ces coniques auront aux points Γ, Γ', Γ'' avec la courbe encore un contact du second ordre. On voit par là que notre courbe algébrique aura aux points Γ, Γ', Γ'',... les mêmes rayons de courbure ρ, ρ', ρ'',... que les coniques S, S′, S″,.... On aura donc, en appliquant de nouveau le théorème de M. Mannheim à ces coniques,

$$\sum \frac{\rho}{\overline{M'\Gamma}^3} + \sum \frac{R}{\overline{M'D}^3} = 0;$$

en appliquant ce théorème à la courbe proposée seule, il vient

$$\sum \frac{\rho}{\overline{M'\Gamma}^3} = 0,$$

ce qui donne

$$\sum \frac{R}{\overline{M'D}^3} = 0.$$

Mais on a

$$M'D = M'M + MD = \delta + MD,$$

δ désignant une quantité infiniment petite; on aura donc

$$\frac{1}{\overline{M'D}^3} = \frac{1}{\overline{MD}^3} + \delta \frac{d}{dMD}\left[\frac{1}{\overline{MD}^3}\right] = \frac{1}{\overline{MD}^3} - 3\delta \frac{1}{\overline{MD}^4},$$

d'où il suit

$$\sum \frac{R}{\overline{M'D}^3} = \sum \frac{R}{\overline{MD}^3} - 3\delta \sum \frac{R}{\overline{MD}^4} = 0.$$

Ayant recours à l'équation (2), on trouve

$$\sum \frac{R}{\overline{MD}^4} = 0.$$

C. Q. F. D.

Question 1003

(voir 2e série, t. IX, p. 132);

PAR M. MORET-BLANC,
Professeur au lycée du Havre.

Les équations tangentielles d'un cône droit touchant trois plans donnés (u_1, v_1, w_1), (u_2, v_2, w_2), (u_3, v_3, w_3) *sont, dans le cas des axes rectangulaires,*

$$\begin{vmatrix} u & v & w & 1 \\ u_1 & v_1 & w_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} u & v & w & \sqrt{u^2+v^2+w^2} \\ u_1 & v_1 & w_1 & \sqrt{u_1^2+v_1^2+w_1^2} \\ u_2 & v_2 & w_2 & \sqrt{u_2^2+v_2^2+w_2^2} \\ u_3 & v_3 & w_3 & \sqrt{u_3^2+v_3^2+w_3^2} \end{vmatrix} = 0;$$

les signes des radicaux sont indépendants ; il y a quatre solutions. (L. PAINVIN.)

Soit

$$(1) \qquad ux + vy + wz + 1 = 0$$

l'équation du plan variable dont le cône est l'enveloppe; pour que cette enveloppe soit déterminée, il faut qu'il existe entre ses trois paramètres deux relations en vertu desquelles deux paramètres soient fonctions du troisième, seule variable indépendante. Or le plan devant coïncider successivement avec chacun des plans donnés, on a les trois équations

$$(2) \qquad u_1 x + v_1 y + w_1 z + 1 = 0,$$

$$(3) \qquad u_2 x + v_2 y + w_2 z + 1 = 0,$$

$$(4) \qquad u_3 x + v_3 y + w_3 z + 1 = 0.$$

Éliminant x, y, z entre ces quatre équations, on aura la première relation

$$\begin{vmatrix} u & v & w & 1 \\ u_1 & v_1 & w_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Soient ξ, η, ζ les coordonnées d'un point de l'axe. Ce point devant être équidistant de tous les plans tangents, on aura les équations

$$\frac{u\xi + v\eta + w\zeta + 1}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} = \frac{u_1\xi + v_1\eta + w_1\zeta + 1}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2 + w_1^2}}$$
$$= \frac{u_2\xi + v_2\eta + w_2\zeta + 1}{\sqrt{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2}} = \frac{u_3\xi + v_3\eta + w_3\zeta + 1}{\sqrt{u_3^2 + v_3^3 + w_3^2}} = \lambda.$$

On obtiendra une seconde relation en éliminant ξ, η, ζ entre ces quatre équations; en supprimant le facteur commun, il vient

$$\begin{vmatrix} u & v & w & \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \\ u_1 & v_1 & w_1 & \sqrt{u_1^2 + v_1^2 + w_1^2} \\ u_2 & v_2 & w_2 & \sqrt{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2} \\ u_3 & v_3 & w_3 & \sqrt{u_3^2 + v_3^2 + w_3^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Chaque radical est susceptible du double signe; mais si, pour une valeur donnée λ, on détermine les signes des trois derniers radicaux, on en conclura ξ, η, ζ, et par suite le signe du premier radical. Il y a donc huit combinaisons de signes correspondant aux huit angles dièdres que forment les trois plans donnés. Ces huit combinaisons ne donnent que quatre solutions, parce qu'en changeant tous les signes d'une colonne on ne change pas l'équation.

En vertu des deux relations trouvées, deux paramètres,

v et w par exemple, seront fonctions de u, et l'on obtiendra en coordonnées ponctuelles l'équation du cône, en éliminant u entre l'équation du plan variable et sa dérivée par rapport à u, qui sera

$$x + y\frac{dv}{du} + z\frac{dw}{du} = 0.$$

Note. — La même question a été résolue par M. O. Callandreau, candidat à l'École Polytechnique.