Nouvelles annales de mathématiques

LAGUERRE

Recherches analytiques sur la surface du troisième ordre qui est la réciproque de la surface de Steiner

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 11 (1872), p. 319-327

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__319_1>

RECHERCHES ANALYTIQUES

sur la surface du troisième ordre qui est la réciproque de la surface de Steiner;

PAR M. LAGUERRE.

I. — *Détermination des lignes asymptotiques de la surface* (*).

1. La théorie de cette surface se rattache intimement, comme je me propose de le faire voir dans cette Note, à la théorie des formes biquadratiques simultanées.

Soient a, b, c, d et e cinq fonctions linéaires des coordonnées cartésiennes x, y et z, nous pouvons considérer les valeurs que prennent ces fonctions en un point de l'espace comme les coordonnées (pentaédriques) de ce point; il est clair d'ailleurs qu'entre ces coordonnées d'un

(*) Les lignes asymptotiques de la surface de Steiner (qui sont réciproques des lignes que nous étudions ici) ont été trouvées pour la première fois par M. Clebsch. (*Journal de Borchardt*, t. 68, p. 1.)

Sur la relation qui a lieu entre les lignes asymptotiques d'une surface et celles de la réciproque, *voir* une Note de M. Mannheim (*Bulletin des Sciences mathématiques*, t. I, p. 198).

point existe une relation linéaire, satisfaite identiquement, et que je mettrai sous la forme

$$(1)\qquad a\varepsilon - 4b\delta + 6c\gamma - 4d\beta + e\alpha = 0,$$

α, β, γ, δ et ε désignant des constantes numériques que je rattacherai au polynôme du quatrième degré

$$\omega = \alpha t^4 + 4\beta t^3 + 6\gamma t^2 + 4\delta t + \varepsilon;$$

en posant

$$u = at^4 + 4bt^3 + 6ct^2 + 4dt + e,$$

on voit que la relation précédente exprime que l'invariant quadratique simultané des formes u et ω est égal à zéro.

2. L'équation $u = 0$ (*), si l'on y considère t comme un paramètre variable, représente un plan mobile qui enveloppe une surface du sixième ordre, dont l'équation est

$$(2)\qquad i^3 - 27j^2 = 0,$$

si l'on représente respectivement par i et par j l'invariant quadratique et l'invariant cubique de la forme u. Les équations de son arête de rebroussement sont

$$i = 0 \quad \text{et} \quad j = 0.$$

La surface que je me propose d'étudier est la surface du troisième ordre $\mathcal{X}$, dont l'équation est

$$j = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix} = 0.$$

(*) *Voir* CAYLEY : *On a certain sextic developpable* (*Quarterly Journal*, t. IX); *Note sur quelques tores sextiques* (*Annali di Matematica*, 2e série, t. II).

Si l'on désigne par $\mathcal{S}$ la surface du second ordre (ou quadrique) représentée par l'équation

$$i = ae - 4bd + 3c^2 = 0,$$

on voit, en considérant l'équation (2), que la surface développable dont j'ai parlé plus haut touche $\mathcal{H}$ tout le long de l'intersection de cette surface avec $\mathcal{S}$, c'est-à-dire tout le long de son arête de rebroussement.

D'où la conséquence suivante :

La cubique $\mathcal{H}$ est coupée par la quadrique $\mathcal{S}$ suivant une de ses lignes asymptotiques.

3. Il est facile de voir qu'en réalité les considérations précédentes nous conduisent à la détermination complète des lignes asymptotiques de $\mathcal{H}$.

Considérons le système linéaire numérique

$$\begin{matrix} p & q & r \\ p' & q' & r' \\ p'' & q'' & r'' \end{matrix}.$$

dont, pour plus de simplicité, je supposerai le déterminant égal à l'unité, et le système composé suivant

$$\begin{matrix} p & p' & p'' \\ q & q' & q'' \\ r & r' & r'' \end{matrix} \times \begin{matrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{matrix} \times \begin{matrix} p & q & r \\ p' & q' & r' \\ p'' & q'' & r'' \end{matrix} = \begin{matrix} a' & b' & c' \\ b' & c'' & d' \\ c' & d' & e' \end{matrix}.$$

Si l'on choisit les nombres $p, q, r, \ldots$ de telle sorte que l'on ait $c'' = c'$, il est clair que l'on aura

$$\begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ b' & c' & d' \\ c' & d' & e' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix},$$

et l'équation de $\mathcal{H}$ s'obtiendra en égalant à zéro l'une ou l'autre de ces deux expressions ; mais l'on n'aura pas en général

$$a'e' - 4b'd' + 3c'^2 = ae - 4bd + 3c^2,$$

c'est-à-dire

$$i' = i.$$

L'équation $i' = 0$ représentera donc une nouvelle quadrique coupant $\mathfrak{X}$ suivant une de ses lignes asymptotiques, et la question qui s'offre à nous est la suivante :

Les nombres p, q, r,... étant choisis de telle sorte que la relation $c'' = c'$ soit satisfaite, trouver les différentes valeurs que peut prendre l'expression

$$i' = a'e' - 4b'd' + 3c'^2.$$

4. J'emploierai dans la suite de ce chapitre les notations dont je me suis servi dans mon Mémoire sur le calcul des systèmes linéaires (*) ; une grande lettre représentera un système linéaire, la même lettre affectée de l'indice zéro ou de l'indice 1 le système réciproque ou

---

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, t. XXV.

Pour éclaircir ces notations par quelques exemples, soit

$$A = \begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{matrix}$$

et a la valeur du déterminant de ce système linéaire ; on aura

$$A_1 = \begin{matrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{matrix} \quad \text{et} \quad A_0 = \begin{matrix} \frac{da}{d\alpha} & \frac{da}{d\alpha'} & \frac{da}{d\alpha''} \\ \frac{da}{d\beta} & \frac{da}{d\beta'} & \frac{da}{d\beta''} \\ \frac{da}{d\gamma} & \frac{da}{d\gamma'} & \frac{da}{d\gamma''} \end{matrix};$$

d'où, par suite,

$$A_0 A = a = \Delta(A).$$

le système inverse, et la caractéristique Δ la valeur du déterminant du système linéaire qu'elle précède.

Cela posé, en calculant les quantités c'' et c', on trouve que, pour qu'elles soient égales, on doit avoir la relation

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} & pra + (pr' + rp')b + (pr'' + rp'' + r'p')c \\ & \quad + (p'r'' + r'p'')d + p''r''e \\ & = q^2 a + 2qq'b + (2qq'' + q'^2)c \\ & \quad + 2q'q''d + q''^2 e; \end{aligned}\right.$$

cette relation doit être identique et elle ne peut différer que dans la forme de la relation (1). On en déduit, ρ désignant une certaine quantité numérique, la série d'égalités

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{2} &= \frac{pr - q^2}{\varepsilon} = \frac{pr' + rp' - 2qq'}{-4\delta} \\ &= \frac{pr'' + rp'' + p'r' - 2qq'' - q'^2}{6\gamma} = \frac{p'r'' + r'p'' - 2q'q''}{-4\beta} \\ &= \frac{p''r'' - q''^2}{\alpha}. \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$\mathrm{I} = \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}, \quad A = \begin{matrix} \varepsilon & -2\delta & \gamma \\ -2\delta & 4\gamma & -2\beta \\ \gamma & -2\beta & \alpha \end{matrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{H} = \begin{matrix} p & q & r \\ p' & q' & r' \\ p'' & q'' & r'' \end{matrix},$$

on déduit facilement des égalités précédentes l'équation

$$(4)\qquad \mathrm{HIH}_1 = \rho A + \theta \mathrm{I},$$

θ désignant une autre quantité numérique dont il est inutile d'écrire la valeur.

Réciproquement, si le système H est choisi de telle manière que le produit HIH_1 soit de la forme $\rho A + \theta\mathrm{I}$, ρ et θ désignant des constantes (*systèmes simples*), les relations (3) sont satisfaites; et si nous faisons

$$\mathrm{A} = \begin{matrix} a & b & c \\ b & c & d, \\ c & d & e \end{matrix}$$

et posons

$$\mathrm{H}_1 \mathrm{A} \mathrm{H} = \mathrm{A}',$$

on voit que les systèmes A′ et A sont de la même forme.

La recherche des systèmes de transformation que nous devons employer est donc ramenée à la résolution de l'équation (4), où A et I désignent des systèmes donnés et où l'un des nombres ρ et θ peut être choisi arbitrairement.

Ces deux nombres sont reliés entre eux par une relation que l'on établira facilement en égalant les déterminants des deux membres de l'équation (4).

On trouve ainsi

$$2 = \Delta(\rho \mathcal{A} + \theta \mathrm{I}) = 4 j_0 \rho^3 - 2 i_0 \rho^2 \theta + 2\theta^3,$$

d'où

$$(4)' \qquad 2 j_0 \rho^3 - i_0 \rho^2 \theta + \theta^3 = 1.$$

Telle est la relation qui relie les nombres ρ et θ; j_0 et i_0 désignent respectivement l'invariant cubique et l'invariant quadratique de la forme ω.

5. La valeur du déterminant que j'ai transcrite ci-dessus se déduit immédiatement de la formule suivante, facile à vérifier, et dont je me servirai dans ce qui suit

$$(5) \left\{ \begin{aligned} &\Delta[\mathrm{A}(\mathcal{A}x + \mathrm{I}y) - z] \\ &\quad = -z^3 + z(iy^2 + 2hxy + kx^2) + j(4 j_0 x^3 - 2 i_0 x^2 y + 2y^3). \end{aligned} \right.$$

Dans cette identité, où x, y, z désignent des quantités arbitraires, j'ai écrit, pour abréger,

$$h = \alpha \frac{dj}{da} + \beta \frac{dj}{db} + \gamma \frac{dj}{dc} + \delta \frac{dj}{dd} + \varepsilon \frac{dj}{de}$$

et

$$-k = 4(ac - b^2)(\gamma\varepsilon - \delta^2) - (ad - bc)(\beta\varepsilon - \gamma\delta) + \ldots,$$

k désignant l'invariant quadratique simultané des hessiens de u et de ω.

6. Ayant choisi l'une quelconque des solutions de l'équation (4), où les nombres ρ et θ satisfont à la relation $(4)'$, on en déduira un système A′ de même forme que le système A.

Les coordonnées a', b', c',... qui entrent dans ce nouveau système sont reliées par une identité de la forme

$$a'\varepsilon' - 4b'\delta' + 6c'\gamma' - 4d'\beta' + e'\alpha' = 0,$$

et je me propose d'abord de déterminer la valeur des constantes qui entrent dans cette relation, ou encore le système $\mathcal{A}'$ que l'on peut former avec elles et qui est analogue à $\mathcal{A}$.

A cet effet, je remarque que l'on a, d'après l'équation (5),

$$\Delta(\mathrm{A}\mathcal{A} - z) = -z^3 + kz + 4jj_0,$$

et que, si le second membre de cette relation ne contient pas de terme en z^2, c'est précisément en vertu de l'identité (1).

Pour trouver $\mathcal{A}'$, il faut donc le déterminer par la condition que le développement de l'expression

$$\Delta(\mathrm{A}'\mathcal{A}' - z)$$

manque du terme en z^2.

Il suffit pour cela de déterminer deux quantités λ et μ, de telle sorte que l'expression

$$\mathcal{A}' = \mathrm{H}_0(\lambda\mathcal{A} + \mu \mathrm{I})\mathrm{H}_{01}$$

ait la même forme que $\mathcal{A}$ (c'est-à-dire que le terme du milieu soit le quadruple de chacun des termes de la diagonale secondaire du système).

En effet, en remplaçant respectivement A' et $\mathcal{A}'$ par leurs valeurs, on a identiquement

$$\Delta(\mathrm{A}'\mathcal{A}' - z) = \Delta[\mathrm{H}_1\mathrm{A}\mathrm{H}\mathrm{H}_0(\lambda\mathcal{A} + \mu\mathrm{I})\mathrm{H}_{01} - z] = \Delta[\mathrm{A}(\lambda\mathcal{A} + \mu\mathrm{I}) - z],$$

expression dont la valeur, en vertu de la formule (5), manque bien du terme en z^2.

7. Les nombres ρ, θ, λ et μ ayant été déterminés comme je l'ai dit ci-dessus, en désignant par i', h', k',... les quantités analogues à i, h, k,..., mais relatives aux systèmes A' et $\mathcal{A}'$, la formule (5) donne la relation

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} \Delta[\mathrm{A}'(\mathcal{A}'x + \mathrm{I}y) - z] = &- z^3 + z(i'y^2 + 2h'xy + k'x^2) \\ &+ j(4j'_0x^3 - 2i'_0x^2y + 2y^3); \end{aligned} \right.$$

le déterminant qui précède devient, si l'on remplace dans son expression A' et $\mathcal{A}'$ par leurs valeurs

$$\Delta\{\mathrm{H}_1\mathrm{A}\,\mathrm{H}[\mathrm{H}_0(\lambda\mathcal{A} + \mu\mathrm{I})\mathrm{H}_{01}x + \mathrm{I}y] - z\},$$

ou, en effectuant les calculs.

$$\Delta(\lambda x\mathrm{H}_1\mathrm{A}\mathcal{A}\mathrm{H}_{01} + \mu x\mathrm{H}_1\mathrm{A}\mathrm{I}\mathrm{H}_{01} + y\mathrm{H}_1\mathrm{A}\mathrm{H}\mathrm{I} - z),$$

ou encore, en multipliant à droite par H_1 le système compris sous le signe Δ et en le divisant ensuite à gauche par H_1,

$$\Delta(\lambda x\mathrm{A}\mathcal{A} + \mu x\mathrm{A}\mathrm{I} + y\,\mathrm{A}\mathrm{H}\mathrm{I}\mathrm{H}_1 - z),$$

ou encore, en vertu de la formule (4).

$$\Delta\{\mathrm{A}[(\lambda x + \rho y)\mathcal{A} + (\mu x + \theta y)\mathrm{I}] - z\}.$$

Si l'on développe ce déterminant au moyen de la formule (5), on obtient l'expression

$$(7)\left\{\begin{array}{l} -z^3+z[i(\mu x+\theta y)^2+2h(\lambda x+\rho y)(\mu x+\theta y)+k(\lambda x+\rho y)^2 \\ \quad +j[4j_0(\lambda x+\rho y)^3-2i_0(\lambda x+\rho y)^2(\mu x+\theta y)+2(\mu x+\theta y)^3. \end{array}\right.$$

8. Les polynômes (7) et (6) doivent être identiques, quelles que soient les variables x, y, z ; en identifiant ces deux expressions, on obtient les relations contenues dans le tableau suivant :

Tableau A.

$$(1)\quad\left\{\begin{array}{l} 2j_0\rho^3 - i_0\rho^2\theta + \theta^3 = 1, \\ 6j_0\lambda\rho^2 - i_0\rho^2\mu - 2i_0\lambda\rho\theta + 3\mu\theta^2 = 0; \end{array}\right.$$

$$(2)\quad\left\{\begin{array}{l} 2j'_0 = 2j_0\lambda^3 - i_0\lambda^2\mu + \mu^3, \\ i'_0 = i_0\lambda^2\theta + 2i_0\lambda\rho\mu - 6j_0\lambda^2\rho - 3\mu^2\theta; \end{array}\right.$$

$$(3)\quad\left\{\begin{array}{l} i' = \theta^2 i + 2\rho\theta h + \rho^2 k, \\ h' = \mu\theta i + (\lambda\theta + \rho\mu)h + \lambda\rho k, \\ k' = \mu^2 i + 2\lambda\mu h + \lambda^2 k. \end{array}\right.$$

Je laisse momentanément de côté ces relations, sur lesquelles j'aurai à revenir plus tard ; je me contenterai de faire observer que la première des équations (3) du tableau précédent donne la solution de la question principale que je m'étais proposée.

Toutes les quadriques fournies par l'équation

$$i' = \theta^2 i + 2\rho\theta h + \rho^2 k = 0,$$

où le rapport $\frac{\rho}{\theta}$ peut varier d'une façon arbitraire, coupent $\mathfrak{X}$ suivant une de ses lignes asymptotiques ; et comme par chacun des points de cette surface passent deux de ces quadriques, on obtient ainsi le système complet des asymptotiques cherchées.

(*La suite prochainement.*)