Désiré André

Théorème d'arithmétique

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 11 (1872), p. 314-319

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__314_1>

THÉORÈME D'ARITHMÉTIQUE;

PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ.

THÉORÈME. — *Si l'on désigne par a et n deux nombres entiers quelconques supérieurs à l'unité, le quotient*

$$\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(na-1)}{a^n}$$

est fractionnaire si a est premier, entier si a n'est pas premier.

Pour établir ce théorème, nous distinguons deux cas, suivant que a est premier ou ne l'est pas.

1° L'entier a est premier. Désignons par x le nombre qui exprime combien de fois a entre comme facteur au numérateur. Ce nombre est, comme on sait, donné par la formule

$$x = \left(\frac{na - 1}{a}\right) + \left(\frac{na - 1}{a^2}\right) + \left(\frac{na - 1}{a^3}\right) + \ldots$$
$$- \left(\frac{n - 1}{a}\right) - \left(\frac{n - 1}{a^2}\right) - \ldots,$$

dans laquelle chaque parenthèse représente la partie entière du quotient qu'elle renferme.

Or on a évidemment

$$\left(\frac{na - 1}{a^2}\right) = \left(\frac{n - 1}{a}\right),$$
$$\left(\frac{na - 1}{a^3}\right) = \left(\frac{n - 1}{a^2}\right),$$
$$\left(\frac{na - 1}{a^4}\right) = \left(\frac{n - 1}{a^3}\right),$$

et ainsi de suite.

Donc la formule qui donne x se réduit à

$$x = \left(\frac{na - 1}{a}\right),$$

ce qui donne

$$x = n - 1.$$

Ainsi le facteur a entre $n - 1$ fois au numérateur. Il entre n fois, c'est-à-dire une fois de plus, au dénominateur. Donc le quotient est fractionnaire, et la première partie du théorème est démontrée.

2° Le nombre a n'est pas premier. Pour démontrer que, dans ce cas, le quotient est entier, nous allons prouver que tout facteur premier de a entre alors au numérateur autant de fois au moins qu'au dénominateur.

Soit b l'un quelconque des facteurs premiers de a, et β son exposant. Nous aurons

$$a = b^\beta q,$$

et b entrera βn fois au dénominateur.

Au numérateur, ce facteur b entrera un nombre de fois y donné par la formule

$$\begin{aligned} y = \left(\frac{nb^\beta q - 1}{b}\right) + \left(\frac{nb^\beta q - 1}{b^2}\right) + \ldots \\ + \left(\frac{nb^\beta q - 1}{b^{\beta+1}}\right) + \left(\frac{nb^\beta q - 1}{b^{\beta+2}}\right) + \ldots \\ - \left(\frac{n-1}{b}\right) - \left(\frac{n-1}{b^2}\right) - \ldots . \end{aligned}$$

Or on a évidemment

$$\left(\frac{nb^\beta q - 1}{b^{\beta+1}}\right) \geq \left(\frac{n-1}{b}\right),$$

$$\left(\frac{nb^\beta q - 1}{b^{\beta+2}}\right) \geq \left(\frac{n-1}{b^2}\right),$$

$$\left(\frac{nb^\beta q - 1}{b^{\beta+3}}\right) \geq \left(\frac{n-1}{b^3}\right),$$

et ainsi de suite.

Donc la formule qui donne y se réduit à

$$y \geq \left(\frac{nb^\beta q - 1}{b}\right) + \left(\frac{nb^\beta q - 1}{b^2}\right) + \ldots + \left(\frac{nb^\beta q - 1}{b^\beta}\right);$$

d'où l'on tire

$$y \geq nb^{\beta-1} q - 1 + nb^{\beta-2} q - 1 + \ldots + nq - 1,$$

et, par suite,

$$y \geq nq\,\frac{b^\beta - 1}{b - 1} - \beta.$$

Il suffit donc, pour établir la seconde partie du théorème, de vérifier que l'inégalité

$$nq\frac{b^\beta - 1}{b - 1} - \beta \geq \beta n$$

est toujours satisfaite lorsque a et n sont supérieurs à l'unité.

Pour faire cette vérification, nous distinguerons deux cas, suivant que β sera égal ou supérieur à l'unité.

Si l'on a $\beta = 1$, l'inégalité se réduit à

$$nq - 1 \geq n,$$

ou bien à

$$q \geq 1 + \frac{1}{n}.$$

Il suffit que q soit supérieur à l'unité. Or il en est forcément ainsi; car, pour que q fût égal à 1 en même temps que β, il faudrait que a fût premier, ce qui est contraire à l'hypothèse actuelle.

Si l'on a $\beta > 1$, l'inégalité peut s'écrire

$$nq(b^\beta - 1) \geq (n+1)(b-1)\beta,$$

ou bien, en posant $b = 1 + c$ (ce qui suppose c entier et supérieur à zéro),

$$nq[(1+c)^\beta - 1] \geq (n+1)\beta c.$$

Développons $(1+c)^\beta$, et divisons les deux membres par c; nous trouvons

$$nq\left[\beta + \frac{\beta(\beta-1)}{1.2}c + \ldots\right] \geq n\beta + \beta,$$

ou bien

$$nq\beta + nq\frac{\beta(\beta-1)}{1.2}c + \ldots \geq n\beta + \beta.$$

Or on a évidemment toujours

$$nq\beta \geq n\beta.$$

De plus, puisque β et n sont tous deux supérieurs à l'unité, on a aussi

$$nq\,\frac{\beta(\beta-1)}{1.2}\,c \geq \beta.$$

Donc l'inégalité qui précède est satisfaite, et la seconde partie du théorème est démontrée.

Remarque. — Il n'y a, dans la démonstration précédente, qu'un seul point où nous ayons eu besoin de supposer $n > 1$. Tout le reste subsiste donc pour $n = 1$. Quant au point considéré, il revient à démontrer que, pour $\beta > 1$, l'on a

$$nq\,\frac{\beta(\beta-1)}{1.2}\,c \geq \beta,$$

ou bien

$$nq(\beta-1)c \geq 2.$$

Si l'on suppose $n = 1$, cette inégalité se réduit à celle-ci

$$q(\beta-1)c \geq 2,$$

qui est toujours satisfaite, excepté dans le cas unique où l'on a en même temps

$$\beta = 2,$$

et

$$n = q = c = 1.$$

Ce cas unique correspond au quotient

$$\frac{1.2.3}{4},$$

qui forme une exception à la seconde partie du théorème lorsqu'on étend celui-ci au cas de $n = 1$.

Donc, en résumé, le quotient

$$\frac{1.2.3\ldots(a-1)}{a},$$

qui correspond au cas où $n=1$, est fractionnaire lorsque a est premier, entier lorsque a n'est pas premier, excepté dans le cas unique où $a=4$; et, à cette exception près, le théorème qui fait l'objet de cet article subsiste lorsque $n=1$.