NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

C. MOREAU

Sur les permutations circulaires distinctes

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 11 (1872), p. 309-314

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__309_0>

SUR LES PERMUTATIONS CIRCULAIRES DISTINCTES;

PAR M. C. MOREAU,
Capitaine d'Artillerie, à Constantine.

Désignons respectivement par P_s^r et par P_s^c les permutations rectilignes et circulaires de S lettres, et par l'abréviation $k!$ le produit $1.2.3\ldots k$. Si les S lettres sont toutes différentes, on a, comme on le sait,

$$P_s^r = S! \quad \text{et} \quad P_s^c = (S-1)!$$

Cette dernière formule tient à ce que chaque permutation circulaire, pouvant être ouverte à chacune des lettres qui la composent, donne naissance à S permutations rectilignes différentes, et que par suite

$$SP_s^c = P_s^r.$$

Supposons maintenant que les S lettres ne soient pas toutes différentes et que A, B, C,..., L représentent respectivement les nombres des lettres a, b, c,..., l qui entrent dans chaque permutation, ayant d'ailleurs

$$A + B + C + \ldots + L = S;$$

dans ce cas,

$$P_s^r = \frac{S!}{A!B!C!\ldots L!}.$$

Quant aux permutations circulaires, si les nombres A, B, C,..., L n'ont aucun diviseur commun, on aura encore, par la raison déjà donnée,

$$SP_s^c = P_s^r.$$

Mais, si les nombres A, B, C,..., L ont des diviseurs communs, il n'en sera plus ainsi, parce que, parmi les P^c_s permutations circulaires distinctes de ces S lettres, il s'en trouvera qui pourront se décomposer en groupes égaux et qui, à cause de cela, ne donneront pas naissance chacune à S permutations rectilignes différentes.

Soit donc d le plus grand commun diviseur des nombres A, B, C,..., L; supposons $S = sd$, et que, décomposé en ses facteurs premiers, on ait

$$d = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \ldots p_n^{\alpha_n}.$$

Désignons encore respectivement par $P^r_{\frac{s}{\delta}}$ et $P^c_{\frac{s}{\delta}}$, δ étant un diviseur de d, les permutations rectilignes et circulaires distinctes de $\frac{S}{\delta}$ lettres avec $\frac{A}{\delta} + \frac{B}{\delta} + \frac{C}{\delta} + \ldots + \frac{L}{\delta} = \frac{S}{\delta}$, de façon que $P^r_{\frac{s}{\delta}} = \dfrac{\frac{S}{\delta}!}{\frac{A}{\delta}!\,\frac{B}{\delta}!\ldots\frac{L}{\delta}!}$.

Cela posé, les permutations rectilignes ou circulaires distinctes des S lettres considérées comprennent :

1° Des permutations qui ne peuvent pas se décomposer en groupes égaux et dont nous désignons le nombre par X_r;

2° Des permutations qui peuvent se décomposer en $p_1, p_2, p_3, \ldots$ ou p_n groupes égaux, en $p_1 p_2, p_1 p_3, \ldots$ ou $p_{n-1} p_n$ groupes égaux....

Or, en supprimant pour le moment les indices supérieurs, les nombres de ces dernières permutations sont respectivement

$$P_{\frac{s}{p_1}},\quad P_{\frac{s}{p_2}},\ldots,\quad P_{\frac{s}{p_n}},$$
$$P_{\frac{s}{p_1 p_2}},\quad P_{\frac{s}{p_1 p_3}},\ldots,\quad P_{\frac{s}{p_{n-1} p_n}},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

et l'on voit, par un raisonnement très-simple et très-connu, que l'on a

$$X_s = P_s - \Sigma P_{\frac{s}{p_1}} + \Sigma P_{\frac{s}{p_1 p_2}} - \Sigma P_{\frac{s}{p_1 p_2 p_3}} + \ldots \pm P_{\frac{s}{p_1 p_2 p_3 \ldots p_n}},$$

les sommes Σ se rapportant aux combinaisons 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3,..., n à n des nombres premiers $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Au surplus, et pour enlever tout doute à cet égard, s'il pouvait en exister, l'exactitude successive des termes de cette formule tient à l'égalité évidente

$$-\frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \ldots \pm 1 = -1.$$

Maintenant chacune des X^c_s permutations circulaires restantes donne naissance à S des X^r_s permutations rectilignes restantes, puisque toutes celles qui peuvent se décomposer en groupes égaux ont été écartées, et il en résulte

$$SX^c_s = X^r_s,$$

équation de laquelle nous allons déduire la valeur cherchée de P^c_s.

Pour cela, mettons en évidence les exposants α_1, α_2, $\alpha_3, \ldots, \alpha_n$, c'est-à-dire posons

$$P_s = P_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}, \qquad P_{\frac{s}{p_1}} = P_{\alpha_1 - 1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n},$$

$$P_{\frac{s}{p_1 p_2}} = P_{\alpha_1 - 1, \alpha_2 - 1, \alpha_3, \ldots, \alpha_n}, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$P_{\frac{s}{p_1 p_2 \ldots p_n}} = P_{\alpha_1 - 1, \alpha_2 - 1, \ldots, \alpha_n - 1}:$$

la valeur de X_s deviendra

$$X_s = P_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} - \Sigma P_{\alpha_1 - 1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} + \Sigma P_{\alpha_1 - 1, \alpha_2 - 1, \ldots, \alpha_n} + \ldots$$
$$\pm P_{\alpha_1 - 1, \ldots, \alpha_n - 1}.$$

Considérons maintenant les fonctions génératrices de

P^r et de P^c, c'est-à-dire deux fonctions des variables auxiliaires $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$,

$$f_r(t_1, t_2, \ldots, t_n) \quad \text{et} \quad f_c(t_1, t_2, \ldots, t_n),$$

telles que dans leurs développements, suivant les puissances entières et positives de $t_1, t_2, \ldots, t_n$, les termes en $t_1^{k_1}.t_2^{k_2}\ldots t_n^{k_n}$ aient respectivement pour coefficients $P^r_{k_1,k_2,\ldots,k_n}$ et $P^c_{k_1,k_2,\ldots,k_n}$, il est clair que, d'après cette définition, X^r_s et X^c_s seront les coefficients de $t_1^{\alpha_1}.t_2^{\alpha_2}\ldots t_n^{\alpha_n}$ dans les développements des fonctions

$$f_r(t_1, t_2, \ldots, t_n)(1 - \Sigma t_1 + \Sigma t_1 t_2 - \ldots \pm t_1 t_2 \ldots t_n)$$

et

$$f_c(t_1, t_2, \ldots, t_n)(1 - \Sigma t_1 + \Sigma t_1 t_2 - \ldots \pm t_1 t_2 \ldots t_n),$$

ou, ce qui revient au même, de

$$f_r(t_1, t_2, \ldots, t_n)(1 - t_1)(1 - t_2)\ldots(1 - t_n)$$

et

$$f_c(t_1, t_2, \ldots, t_n)(1 - t_1)(1 - t_2)\ldots(1 - t_n),$$

et que, à cause de $S = sp_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_n^{\alpha_n}$, si, dans cette dernière fonction, on remplace t_1 par $p_1 t_1$, t_2 par $p_2 t_2, \ldots$ et t_n par $p_n t_n$, SX^c_s sera le coefficient de $t_1^{\alpha_1}.t_2^{\alpha_2}\ldots t_n^{\alpha_n}$ dans le développement de

$$sf_c(p_1 t_1, p_2 t_2, \ldots, p_n t_n)(1 - p_1 t_1)(1 - p_2 t_2)\ldots(1 - p_n t_n).$$

Cela posé, comme l'équation

$$SX^c_s = X^r_s$$

est générale et a été établie en dehors de toute hypothèse particulière faite sur les valeurs des nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ et n, il en résulte que l'on peut écrire

$$sf_c(p_1 t_1, \ldots, p_n t_n)(1 - p_1 t_1)\ldots(1 - p_n t_n)$$
$$= f_r(t_1, \ldots, t_n)(1 - t_1)\ldots(1 - t_n),$$

puisque, dans les développements de ces deux fonctions, les coefficients des termes semblables sont égaux. On aura donc enfin

$$sf_c(p_1t_1, p_2t_2, \ldots, p_nt_n)$$
$$= f_r(t_1, t_2, \ldots, t_n)\frac{(1-t_1)(1-t_2)\ldots(1-t_n)}{(1-p_1t_1)(1-p_2t_2)\ldots(1-p_nt_n)},$$

et il ne reste plus qu'à égaler dans les deux membres de cette équation les coefficients de $t_1^{\alpha_1}.t_2^{\alpha_2}.t_3^{\alpha_3}\ldots t_n^{\alpha_n}$.

Dans le premier membre, ce coefficient est

$$sp_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_n^{\alpha_n}\mathrm{P}^c_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} = \mathrm{SP}^c_s,$$

et, en remarquant que le coefficient de $t_1^{k_1}t_2^{k_2}\ldots t_n^{k_n}$ dans le développement de la fonction $\frac{(1-t_1)(1-t_2)\ldots(1-t_n)}{(1-p_1t_1)(1-p_2t_2)\ldots(1-p_nt_n)}$ est égal à $p_1^{k_1}\left(1-\frac{1}{p_1}\right)$, $p_2^{k_2}\left(1-\frac{1}{p_2}\right), \ldots,$ $p_n^{k_n}\left(1-\frac{1}{p_n}\right)$, on voit que celui de $t_1^{\alpha_1}t_2^{\alpha_2}\ldots t_n^{\alpha_n}$, dans le développement du second membre, sera la somme d'un certain nombre de termes de la forme

$$p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ldots p_n^{k_n}\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_n}\right)\mathrm{P}^r_{\alpha_1-k_1,\ldots,\alpha_n-k_n}.$$

Or $p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ldots p_n^{k_n}$ est un diviseur quelconque δ de d,

$$p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ldots p_n^{k_n}\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_n}\right) = \varphi(\delta)$$

représente combien il y a de nombres inférieurs à δ et premiers avec lui, et $\mathrm{P}^r_{\alpha_1-k_1,\ldots,\alpha_n-k_n} = \mathrm{P}^r_{\frac{s}{\delta}}$; donc on aura

$$\mathrm{SP}^c_s = \Sigma\varphi(\delta)\mathrm{P}^r_{\frac{s}{\delta}},$$

la somme Σ s'étendant à tous les diviseurs δ du plus grand commun diviseur d, y compris 1 et d, $\varphi(\delta)$ ayant la signification usuelle indiquée plus haut et $P^r_{\frac{s}{\delta}}$ étant le nombre des permutations rectilignes distinctes de $\frac{S}{\delta}$ lettres, c'est-à-dire $\dfrac{\frac{S}{\delta}!}{\frac{A}{\delta}!\frac{B}{\delta}!\ldots\frac{L}{\delta}!}$.

La valeur de P^c_s est donc

$$P^c_s = \frac{1}{S}\sum \varphi(\delta)\, P^r_{\frac{s}{\delta}} = \sum \frac{\varphi(\delta)}{\delta}\, \frac{P^r_{\frac{s}{\delta}}}{\frac{S}{\delta}}.$$

Ainsi, si 1, δ_1, δ_2, ..., d sont les différents diviseurs de d, on aura

$$P^c_s = \frac{(S-1)!}{A!B!\ldots L!} + \frac{\varphi(\delta_1)}{\delta_1}\,\frac{\left(\frac{S}{\delta_1}-1\right)!}{\frac{A}{\delta_1}!\ldots\frac{L}{\delta_1}!} + \ldots + \frac{\varphi(d)}{d}\,\frac{\left(\frac{S}{d}-1\right)!}{\frac{A}{d}!\frac{B}{d}!\ldots\frac{L}{d}!}:$$

telle est la formule que nous nous proposions de trouver.