PAINVIN

Étude d'un complexe du second ordre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 11 (1872), p. 289-297

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__289_0>

ÉTUDE D'UN COMPLEXE DU SECOND ORDRE

(suite, voir même tome, p. 202),

PAR M. PAINVIN.

21. Pour que la conique Γ se réduise à deux points distincts, il faut et il suffit que la longueur d'un de ses axes soit nulle.

Par conséquent, d'après l'équation (42), la condition unique pour que la conique (Γ) se réduise à deux points est

$$(45)\qquad \mathfrak{S}_0\mathfrak{G}_0 - e\mathfrak{S}_0 - \mathfrak{H}_0 = 0.$$

Donc la surface enveloppée par les plans Π pour lesquels la conique du complexe se réduit à deux points est

$$(46)\qquad \mathfrak{S}\mathfrak{G} - e\mathfrak{S} - \mathfrak{H} = 0,$$

ou

$$(46\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} &(u^2+v^2+w^2)(\mathrm{BC}u^2+\mathrm{CA}v^2+\mathrm{AB}w^2)\\ &\qquad - e(u^2+v^2+w^2) - (a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2-1) = 0,\end{aligned}\right.$$

ou encore

$$(46\ ter)\quad \left\{\begin{aligned} &(u^2+v^2+w^2)(\mathrm{BC}u^2+\mathrm{CA}v^2+\mathrm{AB}w^2)\\ &\qquad [(\mathrm{B}+\mathrm{C})u^2+(\mathrm{C}+\mathrm{A})v^2+(\mathrm{A}+\mathrm{B})w^2-1] = 0.\end{aligned}\right.$$

L'équation (46 *bis*) nous montre que la surface en question est inscrite dans la développable circonscrite à l'ellipsoïde proposé et au cercle imaginaire de l'infini.

L'équation (46 *ter*) nous fournit une remarque qui sera utilisée plus loin, savoir : que tout plan (u, v, w), tel qu'on ait

$$(47)\qquad (\mathrm{B}+\mathrm{C})u^2+(\mathrm{C}+\mathrm{A})v^2+(\mathrm{A}+\mathrm{B})w^2-1 < 0,$$

ne peut pas toucher la surface Δ; ce plan est extérieur à l'ellipsoïde

$$(B + C)u^2 + (C + A)v^2 + (A + B)w^2 - 1 = 0,$$

ou

$$\frac{x^2}{B + C} + \frac{y^2}{C + A} + \frac{z^2}{A + B} - 1 = 0,$$

lequel ellipsoïde renferme tout entière la sphère (S).

22. Démontrons maintenant que les plans qui touchent la surface (46) touchent également la surface Δ, n° 8. Quoique cette proposition résulte du théorème analogue, démontré par Plücker pour le cas d'un complexe général du 2e ordre, il y a cependant quelque intérêt à montrer comment nos formules se prêtent à sa démonstration.

D'après l'équation (27), n° 12, nous voyons que les coordonnées u_0, v_0, w_0 d'un plan tangent à la surface Δ sont

$$u_0 = \frac{x_0(b^2c^2 + AS_0 + G_0)}{h + gS_0 + eG_0 - H_0},$$

$$v_0 = \frac{y_0(c^2a^2 + BS_0 + G_0)}{h + gS_0 + eG_0 - H_0},$$

$$w_0 = \frac{z_0(a^2b^2 + CS_0 + G_0)}{h + gS_0 + eG_0 - H_0};$$

et si nous supposons le point de contact (x_0, y_0, z_0) sur la nappe supérieure de Δ, par exemple, les formules (23), n° 11, transformeront ces expressions en les suivantes :

$$(1^\circ)\quad \left\{\begin{aligned} u_0 &= \frac{x_0(b^2c^2 + A\rho_2 + \rho_1^2)}{h + g\rho_2 + e\rho_1^2 + \rho_1^2\rho_2}, \\ v_0 &= \frac{y_0(c^2a^2 + B\rho_2 + \rho_1^2)}{h + g\rho_2 + e\rho_1^2 + \rho_1^2\rho_2}, \\ w_0 &\quad \frac{z_0(a^2b^2 + C\rho_2 + \rho_1^2)}{h + g\rho_2 - e\rho_1^2 + \rho_1^2\rho_2}. \end{aligned}\right.$$

On a d'ailleurs

$$(2^{\circ})\quad \left\{\begin{aligned} x_0^2 &= -\frac{(a^4-\rho_1^2)(a^2+\rho_2)}{b_1^2 c_1^2},\\ y_0^2 &= -\frac{(b^4-\rho_1^2)(b^2+\rho_2)}{c_1^2 a_1^2},\\ z_0^2 &= -\frac{(c^4-\rho_1^2)(c^2+\rho_2)}{a_1^2 b_1^2}.\end{aligned}\right.$$

Nous allons maintenant calculer en fonction de ρ_1 et ρ_2 les quantités

$$(3^{\circ})\quad \left\{\begin{aligned} \mathcal{S}_0 &= u_0^2+v_0^2+w_0^2,\\ \mathcal{G}_0 &= \mathrm{BC}u_0^2+\mathrm{CA}v_0^2+\mathrm{AB}w_0^2,\\ \mathcal{H}_0 &= a^2u_0^2+b^2v_0^2+c^2w_0^2-1,\end{aligned}\right.$$

en attribuant à u_0, v_0, w_0 les valeurs (1°).

Si l'on se reporte aux relations (28), (29), (30) et (30 *bis*) du n° 13, on obtient très-facilement

$$(48)\quad \left\{\begin{aligned} \mathcal{S}_0 &= \frac{\rho_1^2-\rho_2^2}{\mathrm{E}},\\ \mathcal{G}_0 &= \frac{e\mathrm{E}-\mathrm{F}}{\mathrm{E}},\\ \mathcal{H}_0 &= \frac{-(\rho_1^2-\rho_2^2)\mathrm{F}}{\mathrm{E}^2},\end{aligned}\right.$$

où

$$(48\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{E} &= \rho_1^2\rho_2+e\rho_1^2+g\rho_2+h,\\ \mathrm{F} &= \rho_1^4+e\rho_1^2\rho_2+g\rho_1^2+h\rho_2.\end{aligned}\right.$$

Les équations (48) établissent des relations assez simples entre les quantités $\mathcal{S}_0$, $\mathcal{G}_0$, $\mathcal{H}_0$ correspondant à un plan tangent à la surface Δ et les paramètres ρ_1 et ρ_2 de son point de contact.

On obtiendrait les formules correspondant à la nappe inférieure de Δ en remplaçant ρ_2 par ρ_3 dans les précédentes.

Les formules (48) nous donnent

$$\mathfrak{S}_0\mathfrak{G}_0 - e\mathfrak{S}_0 - \mathfrak{H}_0 = 0,$$

c'est-à-dire que les plans tangents à la surface Δ touchent la surface (46).

Nota. — On peut encore démontrer que, lorsqu'un plan Π devient tangent à la surface Δ, la conique (Γ) située dans ce plan se réduit à deux points, en supposant que ce plan se déplace parallèlement à lui-même et en remarquant que la conique Γ est imaginaire quand le plan Π est extérieur à la surface Δ, qu'elle devient une hyperbole quand le plan Π passe entre les deux nappes de la surface Δ, puis une ellipse réelle lorsque le plan Π pénètre dans la nappe intérieure de Δ. De là résulte évidemment que la conique (Γ) se réduit à un système de deux points quand le plan Π vient toucher une des nappes de la surface Δ.

Quant à la remarque sur laquelle s'appuie cette démonstration, elle est une conséquence des théorèmes V et VI. On peut aussi l'établir comme il suit.

23. Les longueurs des axes de la conique (Γ) sont données, n° **19**, par l'équation

$$(42)\qquad \mathfrak{S}_0^2\rho^4 - \mathfrak{S}_0(e\mathfrak{S}_0 + \mathfrak{H}_0 - 1)\rho^2 + (\mathfrak{S}_0\mathfrak{G}_0 - e\mathfrak{S}_0 - \mathfrak{H}_0) = 0,$$

ou

$$(42\ bis)\qquad \mathfrak{S}_0^2\rho^4 - M\mathfrak{S}_0\rho^2 + N = 0,$$

après avoir posé

$$(41)\qquad \begin{cases} M = e\mathfrak{S}_0 + \mathfrak{H}_0 - 1, \\ N = \mathfrak{S}_0\mathfrak{G}_0 - e\mathfrak{S}_0 - \mathfrak{H}_0. \end{cases}$$

Il s'agit de rechercher directement quelle est la nature de la conique (Γ). Nous avons déjà remarqué qu'elle ne pouvait jamais être une parabole.

Déterminons le signe de la quantité N lorsqu'on y regarde u, v, w comme les coordonnées d'un plan quelconque. Soient u_1, v_1, w_1 les coordonnées d'un plan tangent à la surface Δ et parallèle au plan (u, v, w); nous aurons alors

$$(1^o) \qquad u = \varepsilon u_1, \quad v = \varepsilon v_1, \quad w = \varepsilon w_1,$$

et la quantité N (46 *ter*), n° 21, deviendra

$$\begin{aligned} N = {} & \varepsilon^4 (u_1^2 + v_1^2 + w_1^2)(BC u_1^2 + CA v_1^2 + AB w_1^2) \\ & - \varepsilon^2 [(B + C) u_1^2 + (C + A) v_1^2 + (A + B) w_1^2] + 1. \end{aligned}$$

Mais le plan (u_1, v_1, w_1) étant tangent à la surface Δ, on a

$$\begin{aligned} & (u_1^2 + v_1^2 + w_1^2)(BC u_1^2 + CA v_1^2 + AB w_1^2) \\ & \quad = (B + C) u_1^2 + (C + A) v_1^2 + (A + B) w_1^2 - 1, \end{aligned}$$

et, par suite, la quantité N pourra s'écrire

$$(2^o) \quad N = (\varepsilon^2 - 1) \{ \varepsilon^2 [(B+C) u_1^2 + (C+A) v_1^2 + (A+B) w_1^2 - 1] - 1 \}.$$

Or nous avons déjà remarqué (n° 21) que, si le plan (u, v, w) était extérieur à l'ellipsoïde

$$(B + C) u^2 + (C + A) v^2 + (A + B) w^2 - 1 = 0,$$

c'est-à-dire si l'on avait

$$(B + C) u^2 + (C + A) v^2 + (A + B) w^2 - 1 < 0,$$

ce plan ne pourrait pas toucher la surface Δ; comme le plan (u_1, v_1, w_1) est un plan tangent réel à cette surface, on a donc ici

$$(3^o) \quad (B + C) u_1^2 + (C + A) v_1^2 + (A + B) w_1^2 - 1 > 0.$$

Lorsque le plan (u, v, w) est extérieur à la surface Δ,

ε est alors inférieur à l'unité, et on peut le supposer aussi petit qu'on voudra en éloignant suffisamment le plan; dans ce cas, on a $N > 0$. Si le plan pénètre dans l'intérieur de la seconde nappe, ε est alors supérieur à l'unité, et on peut le supposer très-grand en rapprochant le plan suffisamment de l'origine; dans ce cas, on a $N > 0$.

De là on conclut que la quantité N sera positive, quand le plan (u, v, w) sera extérieur à la surface Δ ou lorsqu'il pénétrera dans l'intérieur de la nappe inférieure; la quantité N sera négative si le plan passe entre les deux nappes de la surface. Ainsi :

THÉORÈME VIII. — *Lorsque le plan (u_0, v_0, w_0) est extérieur à la surface Δ ou s'il pénètre dans la nappe inférieure, la conique (Γ) correspondante est une* ELLIPSE *imaginaire ou réelle.*

Lorsque le plan (u_0, v_0, w_0) passe entre les deux nappes de la surface Δ, la conique (Γ) correspondante est une HYPERBOLE.

On a une HYPERBOLE ÉQUILATÈRE *lorsque le plan (u_0, v_0, w_0) touche l'ellipsoïde*

$$(B + C)u^2 + (C + A)v^2 + (A + B)w^2 - 2 = 0,$$

ou

$$\frac{x^2}{B + C} + \frac{y^2}{C + A} + \frac{z^2}{A + B} - \frac{1}{2} = 0.$$

Ce nouvel ellipsoïde est renfermé entre la sphère (S) et l'ellipsoïde (G).

24. Nous résumerons une partie des propriétés précédentes dans la proposition qui suit :

THÉORÈME IX. — 1° *Les plans $\Pi(u_0, v_0, w_0)$, pour lesquels la conique (Γ) du complexe se réduit à deux points distincts, sont les plans tangents à la surface Δ,* *lieu des points* $P(x_0, y_0, z_0)$, *pour lesquels le cône* (C) *du complexe se réduit à deux plans distincts.*

La surface (Δ) *est définie par l'une ou l'autre des équations*

$$(I)\quad \begin{cases} (x^2+y^2+z^2)(Ax^2+By^2+Cz^2) \\ \quad -[A(B+C)x^2+B(C+A)y^2+C(A+B)z^2]+ABC=0, \end{cases}$$

$$(II)\quad \begin{cases} (u^2+v^2+w^2)(BCu^2+CAv^2+ABw^2) \\ \quad -[(B+C)u^2+(C+A)v^2+(A+B)w^2]+1=0. \end{cases}$$

2° *Les points de la* NAPPE SUPÉRIEURE *de* Δ *sont ceux pour lesquels le cône* (C) *se réduit à deux plans réels, et les plans tangents réels à cette nappe sont ceux pour lesquels la conique* (Γ) *du complexe se réduit à deux points imaginaires.*

Les points de la NAPPE INFÉRIEURE *de* Δ *sont ceux pour lesquels le cône* (C) *du complexe se réduit à deux plans imaginaires, et les plans tangents à cette nappe sont ceux pour lesquels la conique* (Γ) *du complexe se réduit à deux points réels.*

3° *Les plans réels auxquels se réduit le cône du complexe touchent la nappe inférieure de* Δ, *et les plans imaginaires touchent* (*imaginairement*) *la nappe supérieure; et, réciproquement, tout plan tangent à la surface* Δ *est un plan d'un des systèmes de plans du complexe.*

Les deux points d'une conique (Γ), *réduite à deux points, appartiennent à la surface* Δ; *et, réciproquement, un point quelconque de la surface* Δ *appartient à un des systèmes de deux points constituant une conique* (Γ) *réduite à deux points.*

4° *Le lieu des milieux des segments* (*réels ou imaginaires*) *formés par la conique* (Γ) *du complexe, réduite à deux points, est la podaire de la surface* Δ *relative au centre* O *de l'ellipsoïde.*

5° *La surface* (Δ) *passe par l'intersection* (*imaginaire*) *de l'ellipsoïde donné avec la sphère lieu des sommets de trièdres trirectangles circonscrits à cet ellipsoïde; elle est inscrite dans la développable circonscrite à l'ellipsoïde donné et au cercle imaginaire de l'infini.*

6° *La surface* (Δ) *est la* SURFACE DES ONDES *relative à l'ellipsoïde directeur*

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} - 1 = 0,$$

c'est-à-dire qu'on l'obtient en prenant, à partir du centre, sur la perpendiculaire à chaque section centrale, des distances égales aux longueurs des axes de l'ellipse qu'elle détermine.

Revenons sur les diverses parties de cette proposition fondamentale qui renferme plusieurs propriétés déjà énoncées.

La proposition (1°) a été démontrée aux n^{os} 9 et 22.

Quant à la proposition (2°), une partie se trouve dans le théorème IV, n° 11; l'autre partie est une conséquence immédiate du théorème III, n° 23.

Pour la proposition (3°), nous pouvons l'établir ainsi. Soit a un point de la nappe supérieure; le cône du complexe, ayant son sommet en a, se réduit à deux plans; soit Π_0 l'un de ces plans. Puisqu'il y a dans ce plan une infinité de droites qui passent par a, la conique Γ correspondant au plan Π_0 se réduit donc à deux points, et a est un de ces points; il résulte de là que le plan Π_0 touche la nappe inférieure de Δ.

Si maintenant on considère un plan Π_1 tangent à la nappe inférieure de Δ, la conique Γ se réduit à deux points; si a est un de ces points, il y aura une infinité de droites du complexe situées dans ce plan et passant par a; le cône du complexe, ayant son sommet en a, doit donc se réduire à deux plans; par conséquent, le sommet a appartient à la nappe supérieure, et le plan Π_1 est un plan d'un des systèmes du complexe.

Le même raisonnement est applicable à la nappe inférieure. Plus loin, nous démontrerons toutes ces propriétés par l'analyse.

La proposition (4°) est une conséquence évidente du théorème VI, n° 15.

La première partie de la proposition (5°) résulte de l'équation (21 *bis*), n° 8, et la seconde partie résulte de l'équation (46 *bis*), n° 21.

La proposition (6°) n'est que la reproduction du théorème III, n° 9.

(*La suite prochainement.*)