Nouvelles annales de mathématiques

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 11 (1872), p. 280-287

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__280_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 32

(voir 1re série, t. I, p. 291).

PAR M. J. MISTER,

Répétiteur d'Analyse à l'École du Génie civil de Belgique.

THÉORÈME. — *a et b désignant les demi-axes principaux d'une ellipse, le périmètre de l'ellipse est toujours compris entre $\pi(a+b)$ et $\pi\sqrt{2a^2+2b^2}$.*

(J. BERNOULLI.)

On peut prendre pour coordonnées d'un point de l'ellipse

$$x = a \sin\varphi, \quad y = b \cos\varphi,$$

et par suite

$$dx = a \cos\varphi\, d\varphi, \quad dy = -b \sin\varphi\, d\varphi, \quad ds = \sqrt{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi,$$

d'où, pour un quart d'ellipse,

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi,$$

ou encore

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi}\, d\varphi.$$

Si dans ces intégrales on donne à φ une valeur constante $\varphi = 0$, en appelant s_1 la nouvelle valeur de s, on aura

$$s_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} a\, d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{4}} b\, d\varphi,$$

d'où l'on tire

$$s - s_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\sqrt{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi} + \sqrt{a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi} - a - b\right) d\varphi.$$

Le multiplicateur de $d\varphi$ est une fonction de φ qui est toujours positive. En effet, sa dérivée est égale à

$$\frac{(a^2 - b^2)\sin 2\varphi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}}\right),$$

et comme

$$\sqrt{a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi} < \sqrt{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi},$$

cette dérivée sera positive, et comme la fonction s'annule pour $\varphi = 0$, il en résulte que cette fonction sera toujours positive. Par conséquent, on pourra écrire

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi} + \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}\right) d\varphi > \int_0^{\frac{\pi}{4}} (a+b)\, d\varphi,$$

ou, E désignant le périmètre de l'ellipse,

$$\frac{E}{4} > (a+b)\frac{\pi}{4}.$$

Donc, 1°

$$E > \pi(a+b).$$

En second lieu, si dans la valeur de s on donne à l'angle φ la valeur constante $\varphi = \frac{\pi}{4}$, en appelant s_2 la nouvelle valeur de s, on aura

$$s_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2a^2 + 2b^2}\, d\varphi,$$

et par suite

$$s_2 - s = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\sqrt{2a^2 + 2b^2} - \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi} - \sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}\right) d\varphi.$$

Le multiplicateur de $d\varphi$ est une nouvelle fonction de φ qui est encore positive. En effet, sa dérivée étant égale à la précédente changée de signe sera toujours négative, mais ne pourra s'annuler, puisque φ est plus petit que $\frac{\pi}{4}$. Comme la fonction est positive pour $\varphi = 0$, il en résulte qu'elle sera constamment positive, et par suite on pourra encore écrire

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2a^2 + 2b^2}\, d\varphi > \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi} + \sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}\right) d\varphi$$

ou

$$\frac{E}{4} < \sqrt{2a^2 + 2b^2}\,\frac{\pi}{4}.$$

Donc 2°

$$E < \pi\sqrt{2a^2 + 2b^2}.$$

Note. — *Voir*, 1re série, t. III, une solution de M. A. Peyronny.

Question 166

(voir 1re série, t. VI, p. 394);

PAR M. H. BROCARD.

Le lieu géométrique des projections orthogonales du centre de la lemniscate de Bernoulli sur ses tangentes a pour équation polaire

$$\rho^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \cos\tfrac{2}{3}\omega.$$

(W. ROBERTS.)

L'équation polaire de la lemniscate étant

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta,$$

on en tire

$$\operatorname{tang} V = \frac{r}{r'} = -\cot 2\theta;$$

d'où

$$V - 2\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Mais, ρ et ω étant les coordonnées d'un point du lieu, on a

$$\rho = r\cos(\omega - \theta)$$

et

$$V = \frac{\pi}{2} + \omega - \theta;$$

on déduit de là

$$\omega = 3\theta,$$

et, pour l'équation du lieu,

$$\rho^2 = a^2 \cos^3 \frac{2\omega}{3},$$

ou

$$\rho^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \cos \tfrac{2}{3} \omega.$$

On trouverait de même que le lieu des projections du centre de cette nouvelle courbe sur ses tangentes, ou la deuxième podaire de la lemniscate, a pour équation

$$\rho^{\frac{2}{5}} = a^{\frac{2}{5}} \cos \tfrac{2}{5} \omega;$$

et d'une manière générale que les podaires successives des courbes

$$\rho^m = a^m \cos m\omega$$

appartiennent à la même famille (*).

Question 977

(voir 2e serie, t VIII, p. 563),

PAR M. MORET-BLANC,

Professeur au lycée du Havre.

On donne une parabole et un point intérieur à cette courbe ; faire passer par le point donné une circonférence doublement tangente à la parabole. (Détermination graphique du centre et du rayon de la circonférence.)

Soient

$$(1) \qquad y^2 = 2px$$

l'équation de la parabole, x_1, y_1 les coordonnées du

(*) *Voir*, à ce sujet, l'exposé historique inséré au t. III de la 2e série, p. 80. *Voir* aussi, même série, t. IX, p. 30, et t. XI, p. 162, deux Notes de M. Allégret relatives aux propriétés de ces courbes.

point donné, l sa distance à l'origine et α, β les coordonnées inconnues du centre du cercle.

L'équation de ce cercle sera

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(x_1-\alpha)^2+(y_1-\beta)^2,$$

ou

$$(2)\qquad x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y=l^2-2\alpha x_1-2\beta y_1.$$

Son intersection avec la parabole sera déterminée par les équations (1) et (2). Pour que ce cercle soit doublement tangent à la parabole, il faut que l'équation du 4^e degré en y, résultant de l'élimination de x entre ces deux équations, ait deux couples de racines égales, et, par conséquent, que son premier membre soit un carré. Cette équation est

$$y^4+4p^2y^2-4p\alpha y^2-8p^2\beta y-4p^2(l^2-2\alpha x_1-2\beta y_1)=0.$$

Le terme du 3^e degré manquant, pour que le premier membre soit un carré, il faut d'abord que $\beta=0$, ce qu'on pouvait prévoir *a priori*.

L'équation se réduit à

$$y^4+4p(p-\alpha)y^2-4p^2(l^2-2\alpha x_1)=0.$$

Il faut ensuite que l'on ait

$$4p^2(p-\alpha)^2=4p^2(2\alpha x_1-l^2),$$

ou

$$(p-\alpha)^2=2\alpha x_1-l^2,$$

$$\alpha^2-2(x_1+p)\alpha+l^2+p^2=0,$$

$$\alpha=x_1+p\pm\sqrt{2px_1-y_1^2}.$$

Le point étant à l'intérieur de la parabole $2px_1-y_1^2>0$, le problème admettra toujours deux solutions.

La construction des deux valeurs de α revient à ce problème de Géométrie élémentaire : construire deux lignes connaissant leur somme $2(x_1 + p)$ et leur produit $l^2 + p^2$.

Joignant le point α au point donné, on aura le rayon.

On parvient plus simplement au même résultat par d'autres considérations.

Le centre du cercle devant se trouver sur l'axe, si l'on nomme α sa distance au sommet, le carré du rayon ou de la normale sera égal à $p(2\alpha - p)$; mais il est aussi égal à $(x_1 - \alpha)^2 + y_1^2 = l^2 - 2\alpha x_1 + a^2$; d'où l'équation

$$\alpha^2 - 2(x_1 + p)\alpha + l^2 + p^2 = 0.$$

Note. — La même question a été résolue par MM. O. Callandreau; J. Augier, élève du lycée de Lyon; Aubry, élève à Saint-Étienne; A. Morel, répétiteur à Sainte-Barbe; A. Petot, élève du lycée de Nancy; A. Luc, E. Laclais et H. Lez.

Question 1048

(voir 2e série, t. X, p. 557);

PAR M. GAMBEY,

Professeur au lycée de Saint-Étienne.

A, B, C *étant les angles d'un triangle rectiligne, on propose de rendre minimum*

$$\frac{\sin A}{\sin B . \sin C} + \frac{\sin B}{\sin A . \sin C} + \frac{\sin C}{\sin A . \sin B}.$$

(J.-Ch. Dupain.)

Par la relation des sinus, je transforme l'expression proposée en celle-ci :

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2S},$$

dans laquelle a, b, c et S désignent les côtés et la surface d'un triangle rectiligne.

La question, ainsi transformée, restera tout aussi générale que la proposée, si j'établis entre les trois côtés a, b, c la relation

$$a + b + c = 2p = \text{const.};$$

car avec le périmètre et deux angles pris arbitrairement, pourvu que leur somme soit plus petite que deux droits, on peut toujours construire un triangle.

Mais alors le numérateur devient *minimum* et le dénominateur devient *maximum* pour $a = b = c$; donc l'expression transformée devient aussi minimum pour cette hypothèse.

Ainsi la condition cherchée est $A = B = C$, ce qui conduit à $2\sqrt{3}$ pour le minimum demandé.

Remarque. — Si l'on pose $\frac{b}{a} = \alpha$, $\frac{c}{a} = \beta$, et si l'on remplace S par

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{4}\sqrt{[(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2]},$$

il viendra, après avoir élevé au carré

$$\frac{4(1 + \alpha^2 + \beta^2)^2}{[(1+\alpha)^2 - \beta^2][\beta^2 - (1-\alpha)^2]}.$$

En égalant à zéro séparément les dérivées par rapport à α et β, on arrive aux équations

$$\alpha^2(\beta^2 - \alpha^2) + \alpha^2 - 1 = 0,$$
$$\beta^2(\alpha^2 - \beta^2) + \beta^2 - 1 = 0,$$

d'où l'on tire

$$\alpha = \beta = 1; \quad \text{par suite} \quad a = b = c,$$

comme ci-dessus. On vérifie aisément que c'est un minimum.

Note. — La même question a ete resolue par MM. A. Pellissier; H. Brocard; S. Dautheville; Leon Lecornu, eleve du lycee de Caen; C. Guesnet, eleve du lycee du Havre.