Faure

Théorie des indices par rapport à une courbe et une surface du second degré

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 11 (1872), p. 261-268

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__261_0>

THÉORIE DES INDICES PAR RAPPORT A UNE COURBE ET UNE SURFACE DU SECOND DEGRÉ;

PAR M. FAURE,
Chef d'escadrons d'Artillerie.

Indice d'un point par rapport à une conique.

I. DÉFINITION. — *Si, par un point m, on mène une transversale rencontrant aux points a et b une conique donnée, le rapport du produit ma.mb au carré du demi-diamètre parallèle à la transversale est l'indice du point m par rapport à la conique.*

L'indice est négatif ou positif, suivant que le point m et le centre de la conique appartiennent à la même région de la courbe ou à des régions différentes. Ainsi, dans l'ellipse, l'indice d'un point extérieur est positif, mais il est négatif dans l'hyperbole. L'indice d'un point de la conique est nul, et celui du centre est égal à -1.

L'indice du point est susceptible de se définir d'un grand nombre de manières, de sorte que tout théorème relatif aux indices en donne immédiatement plusieurs autres, d'énoncés souvent très-différents. Nous indiquerons, sans démonstrations, quelques-unes de ces définitions : les unes, comme on le verra, sont spéciales au cas d'un point extérieur à la conique; d'autres, au cas d'un point intérieur; enfin les premières, plus générales, s'appliquent aux deux cas indifféremment :

1° L'indice d'un point est égal et de signe contraire au rapport des distances de ce point et du centre de la conique à la polaire du point.

2° La polaire du point m rencontrant en n l'un des axes de la conique, on fait passer un cercle par le point n et les foyers (réels ou imaginaires) situés sur l'autre axe. L'indice du point m est égal à la puissance de ce point par rapport au cercle, divisée par le carré du demi-axe de la conique qui contient les foyers employés.

3° Si, du point m, on abaisse une perpendiculaire mp sur la polaire de ce point et que l'on prolonge cette perpendiculaire en q, où elle rencontre l'un des axes de la conique, on obtiendra l'indice du point m en divisant le produit $mp.mq$ par le carré du demi-axe qui ne passe pas au point q.

4° La racine carrée de l'indice du point m est égale à l'aire du quadrilatère déterminé par les tangentes menées du point m à la conique et les rayons menés du centre aux points de contact, divisé par le produit des demi-axes de la conique.

5° La racine carrée de l'indice du point m, par rapport à une ellipse, est égale à la tangente de la demi-différence des angles d'anomalie qui déterminent les points de contact des tangentes menées du point m à la conique.

6° La racine carrée de l'indice du point m est égale au produit des distances du point m aux foyers de la conique, multiplié par le sinus de l'angle sous lequel la conique est vue de ce point, et divisé par le double du produit des demi-axes de la conique.

7° La racine carrée de l'indice du point m est égale à la puissance de ce point, par rapport au cercle lieu des sommets des angles droits circonscrits à la conique, multiplié par la tangente de l'angle sous lequel la conique est vue de ce point, et divisé par le double du produit des demi-axes de la conique.

8° La racine carrée de l'indice du point m est égale au produit des demi-axes de la conique, divisé par le double du carré du demi-diamètre qui passe au point *m*, multiplié par le sinus de l'angle formé par les tangentes menées du point *m* à la conique, et divisé par le produit des sinus des angles que forment ces tangentes avec le diamètre qui passe au point *m*.

9° La racine carrée de l'indice du point *m* est égale au sinus de l'angle formé par les tangentes menées du point *m* à la conique, divisé par le produit des sinus des angles que forment ces tangentes avec la droite menée du point *m* à l'un des foyers, multiplié par le rapport du demi-axe qui contient les foyers imaginaires, à l'autre axe.

10° Le point *o* étant le centre de la conique, par le point *m* menez le demi-diamètre *oa*, et la corde *bc* parallèle au diamètre conjugué de *oa*; l'indice du point *m*, pris en signe contraire, est égal au carré de l'aire du quadrilatère *obac* divisé par le carré du produit des demi-axes de la conique.

11° Dans l'ellipse, l'indice du point *m*, pris en signe contraire, est égal au carré du sinus de la demi-différence des angles d'anomalie qui déterminent les points *b* et *c* de la construction précédente.

Indice d'une droite par rapport à une conique.

II. Définition. — *L'indice d'une droite est égal à l'indice du point où cette droite est rencontrée par le diamètre conjugué à sa direction, divisé par le carré du demi-diamètre parallèle à la droite.*

Les théorèmes suivants peuvent aussi servir de définition à l'indice d'une droite :

1° L'indice d'une droite est égal au produit des distances de cette droite aux tangentes de la conique parallèles à la droite, divisé par le carré du produit des demi-axes de la conique;

2° L'indice d'une droite est égal au produit des distances du pôle de la droite et du centre de la conique à cette droite, divisé par le carré du produit des demi-axes de la conique;

3° Si l'on prend un point arbitraire sur la droite donnée, l'indice de cette droite sera égal au produit des distances de ce point aux foyers de la conique, multiplié par le produit des sinus des angles formés par les tangentes menées à la conique par le point arbitraire, avec la droite donnée, divisé par le carré du produit des demi-axes de la conique;

4° Si l'on prend un point arbitraire sur la droite donnée, l'indice de cette droite, pris en signe contraire, sera égal au produit des sinus des angles formés par la droite avec les tangentes menées à la conique par le point arbitraire, divisé par le produit des sinus des angles formés par ces mêmes tangentes avec le diamètre qui passe par ce point et par le carré du demi-diamètre de la conique qui coïncide avec cette direction;

5° L'indice d'une droite est égal au carré de la distance du centre de la conique à la droite, divisé par le produit des carrés des demi-axes de la conique, diminué de l'inverse du carré du demi-diamètre parallèle à la droite donnée.

6° L'indice d'une droite est égal à la puissance du pied de la perpendiculaire abaissée de l'un des foyers sur la droite, par rapport au cercle décrit sur l'axe focal comme diamètre, divisé par le produit des carrés des demi-axes de la conique.

Les définitions suivantes sont spéciales au cas o la droite donnée rencontre la conique :

7° L'indice d'une droite, pris en signe contraire, est égal au carré de la demi-corde déterminée par cette droite dans la conique, divisé par la quatrième puissance du demi-diamètre parallèle à la droite;

8° Si l'on mène, par le centre o de la conique, une parallèle à la droite donnée, rencontrant au point a la tangente menée en un quelconque des points d'intersection de la droite avec la conique, l'indice de la droite, pris en signe contraire, est égal à l'inverse du carré de la longueur oa;

9° L'indice d'une droite, pris en signe contraire, est égal au carré du sinus de la demi-différence des angles d'anomalie qui déterminent les points d'intersection de la droite avec la conique, divisé par le carré du demi-diamètre parallèle à la droite.

Remarquons que l'indice d'une droite est nul lorsque cette droite touche la conique, et que l'indice d'un diamètre est égal au carré de l'inverse de la longueur du demi-diamètre, pris en signe contraire.

Indice d'un point par rapport à une surface du second degré.

III. Définition. — *Si, par un point m, on mène une transversale rencontrant aux points a et b une surface du second degré, le rapport du produit $ma.mb$ au carré du demi-diamètre parallèle à la transversale est l'indice du point m par rapport à la surface.*

De même que pour le cas des coniques, l'indice d'un point par rapport à une surface du second degré est négatif ou positif suivant que le point et le centre de la surface sont dans la même région de cette surface ou dans des régions différentes. L'indice d'un point de la surface est nul, et celui du centre est égal à -1.

L'indice d'un point par rapport à une surface se déduit aisément de l'indice de ce point par rapport à une conique. Menons, en effet, par le point m un plan arbitraire coupant notre surface suivant une conique. On voit de suite que l'indice de ce point par rapport à la surface sera égal à l'indice du point par rapport à la conique, multiplié par le rapport de l'aire de la conique à celle de la section diamétrale parallèle au plan arbitraire. En particulier, l'indice d'un point par rapport à la surface sera égal à l'indice du même point par rapport à une section diamétrale passant par ce point. A l'aide des valeurs indiquées pour l'indice d'un point par rapport à une conique, on obtiendra des valeurs correspondantes pour l'indice d'un point par rapport à une surface. Nous citerons les suivantes :

1° L'indice d'un point par rapport à une surface du second degré est égal et de signe contraire, au rapport des distances de ce point et du centre de la surface, au plan polaire du point;

2° Si, du point m, on abaisse une perpendiculaire mp sur le plan polaire de ce point, et qu'on la prolonge en q, où elle rencontre le plan déterminé par deux des axes de la surface, l'indice du point m sera égal au produit $mp \cdot mq$, divisé par le carré du troisième demi-axe;

3° Par le point m, menons une tangente ma à la surface; désignons par o le centre de cette surface, par b l'extrémité du diamètre conjugué au plan oma, et par V le volume du parallélépipède construit sur le tétraèdre $omab$. La racine carrée de l'indice du point m sera égale au volume V, divisé par le produit des demi-axes principaux de la surface;

4° Par le point m, menons la demi-corde ma conjuguée avec om; désignons par b l'extrémité du diamètre conjugué au plan oma, et par V le volume du parallélépipède construit sur le tétraèdre $omab$. L'indice du point m, pris en signe contraire, sera égal au carré du volume V, divisé par le carré du produit des demi-axes principaux de la surface.

Indice d'une droite par rapport à une surface du second degré.

IV. Définition. — *L'indice d'une droite par rapport à une surface du second degré est égal à l'indice du point où cette droite est rencontrée par le plan diamétral conjugué à sa direction, divisé par le carré du demi-diamètre parallèle à la droite.*

On voit aisément que si l'on mène par la droite un plan arbitraire coupant la surface suivant une conique, l'indice de la droite par rapport à la surface sera égal à l'indice de cette droite par rapport à la conique, multiplié par le carré du rapport de l'aire de la conique à l'aire de la section diamétrale parallèle. A l'aide des valeurs indiquées pour l'indice d'une droite en géométrie plane, on obtiendra des valeurs correspondantes pour l'indice d'une droite dans la géométrie de l'espace.

1° L'indice d'une droite est égal et de signe contraire au carré de la demi-corde déterminée par cette droite dans la surface, divisé par la quatrième puissance du demi-diamètre parallèle à la droite ;

2° Si l'on mène par le centre o de la surface une parallèle à la droite donnée rencontrant en a le plan tangent mené à la surface en un des deux points où elle est coupée par la droite, l'indice de cette droite, pris en signe contraire, sera égal à l'inverse du carré de la longueur oa ;

3° On mène par la droite un plan tangent à la surface ; la racine carrée de l'indice de cette droite est égale à la distance du point de contact à la droite, divisé par le produit des demi-axes de la section diamétrale parallèle au plan tangent ;

4° La racine carrée de l'indice d'une droite est égale au sinus de l'angle que font entre eux les plans tangents menés par la droite, divisé par le produit des sinus des angles formés par ces plans avec celui qui passe par la droite et le centre de la surface, et multiplié par le rapport du produit des demi-axes de la surface au double du produit des carrés des demi-axes de la section diamétrale qui passe par la droite.

5° L'indice d'une droite est égal au produit de la plus courte distance de cette droite à sa polaire par le sinus de l'angle de ces droites, par le demi-diamètre de la surface parallèle à la polaire, et par la distance du centre à la droite donnée, divisé par le produit des demi-axes de la conique diamétrale qui passe par cette droite et par celui des demi-axes de la surface donnée.

Nota. — L'indice d'une droite qui touche la surface du second degré est nul, et si une droite passe par le centre, son indice est égal et de signe contraire à l'inverse du carré du demi-diamètre qu'elle détermine.

(*La suite prochainement.*)