NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ABEL TRANSON

Simples notes, 1° Sur la limite des racines ; 2° Sur un théorème de Cauchy ; 3° Sur une question de licence

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 11 (1872), p. 254-260

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__254_1>

SIMPLES NOTES

1° Sur la limite des racines; — 2° Sur un théorème de Cauchy; — 3° Sur une question de licence;

PAR M. ABEL TRANSON.

I. *Limites supérieures des racines d'une équation donnée.* — Pour établir les *règles de Maclaurin* quelques calculs sont nécessaires, et ces calculs, quoique fort simples, ont embarrassé quelquefois à l'examen des candidats qui pourtant n'étaient pas sans valeur.

Je crois donc utile de rappeler d'abord une indication donnée autrefois par Terquem.

« Il semble qu'on n'insiste pas assez, dans l'exposition de la numération, sur une propriété très-importante et qu'on ne saurait trop tôt inculquer aux élèves : c'est que, dans tout nombre, une unité d'un ordre quelconque est plus grande que la somme de toutes les unités qui la suivent, et cela dans un système quelconque. Cette propriété est le fondement de la division et des extractions de racines, et se retrouve même dans la théorie des équations. Ainsi, étant donné le polynôme

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m;$$

A_n étant le plus grand coefficient, $A_0 (A_n + 1)^m$ est plus grand que la somme des termes qui suivent le premier, parce qu'alors le polynôme devient un nombre écrit dans le système dont la base est $A_n + 1$. » (*Nouvelles Annales*, 1re série, t. I, p. 51.)

Par ce moyen, on établira la première règle de Maclaurin sans calcul et d'une façon en quelque sorte intuitive. Or on peut ramener au même principe la démonstration de la formule $1 + \sqrt[n]{N}$, dans laquelle N est le plus grand des coefficients négatifs pris en valeur absolue, et n l'excès du degré de l'équation sur l'exposant de l'inconnue dans le premier terme négatif.

Il s'agit alors de trouver pour x un nombre qui satisfasse à la condition

$$x^m > N x^{m-n} + N x^{m-n-1} + \ldots + N.$$

A cet effet, considérons un nombre écrit dans la base b et de la forme suivante

$$(2) \quad b^m + (b-1) b^{m-1} + (b-1) b^{m-2} + \ldots + (b-1).$$

D'après le principe indiqué par Terquem, le premier terme de ce polynôme a une valeur supérieure à la somme des termes qui le suivent; on aura donc *à fortiori*

$$b^m > (b-1) b^{n-1} b^{m-n} + (b-1) b^{n-1} b^{m-n-1} + \ldots + (b-1) b^{n-1},$$

car on a conservé, mais en changeant seulement leur forme, les $m - n + 1$ premiers termes qui suivent b^m dans (2); et l'on a supprimé tous les autres.

On aura donc, par un nouvel *à fortiori*,

$$b^m > (b-1)^n b^{m-n} + (b-1)^n b^{m-n-1} + \ldots + (b-1)^n.$$

Et alors, pour satisfaire à la condition demandée, il suffit de prendre pour x une valeur de b qui satisfasse à la condition

$$(b-1)^n \geqq N,$$

ce qui donne $x \geqq 1 + \sqrt[n]{N}$.

On connaît la *règle de Lagrange :* soient $-Ax^{m-p}$, $-Bx^{m-r}$, $-Cx^{m-s}, \ldots$, les termes négatifs de l'équation proposée; on a une limite supérieure des racines positives en additionnant les deux plus grandes des quantités $\sqrt[p]{A}$, $\sqrt[r]{B}$, $\sqrt[s]{C}, \ldots$

M. Pury a donné une démonstration de cette règle dans les *Nouvelles Annales,* 1[re] série, t. I, p. 243; mais il y a une *règle de Cauchy* beaucoup moins connue, souvent plus avantageuse que celle de Lagrange, et dont la démonstration est très-simple.

Soit l'équation proposée

$$x^m + a_1 x^{m-2} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_m = 0,$$

et soient a_p, a_r, $a_t, \ldots$ les coefficients négatifs en nombre K; on a une limite supérieure en prenant le plus grand des nombres suivants

$$(\mathrm{K}a_p)^{\frac{1}{p}}, \quad (\mathrm{K}a_r)^{\frac{1}{r}}, \quad (\mathrm{K}a_t)^{\frac{1}{t}}, \ldots.$$

En effet, écrivons les inégalités suivantes

$$\begin{array}{lll}
b > (\mathrm{K}a_p)^{\frac{1}{p}}, & \text{d'où} & b^p > \mathrm{K}a_p, \\
b > (\mathrm{K}a_r)^{\frac{1}{r}}, & \text{d'où} & b^r > \mathrm{K}a_r, \\
b > (\mathrm{K}a_t)^{\frac{1}{t}}, & \text{d'où} & b^t > \mathrm{K}a_t, \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots,
\end{array}$$

et ajoutons les termes de la seconde colonne, qui sont en nombre K, après avoir multiplié la première par b^{m-p}, la seconde par b^{m-r}, la troisième par $b^{m-t}, \ldots$; il viendra, après avoir divisé par K,

$$b^m > a_p b^{m-p} + a_r b^{m-r} + a_t b^{m-t} + \ldots;$$

de sorte que le nombre b rend le premier terme de l'équation supérieur à la somme des termes négatifs. Donc, etc.

Pour comparer ces règles, appliquons-les à l'équation suivante

$$x^3 - Ax^2 + x - 27\,000 = 0,$$

dans laquelle A est un nombre positif quelconque inférieur à 19. La règle de Maclaurin donne 27 001; celle de Lagrange donne A + 30, et celle de Cauchy donne 37.

II. *Sur un théorème de Cauchy.* — « La racine $m^{\text{ième}}$ » du produit de m nombres est plus petite que la moyenne » arithmétique entre ces nombres. »

M. Boutroux a démontré ce théorème par un calcul que Terquem déclare peu différent de celui que Cauchy avait donné dans son *Cours d'analyse* (p. 457; 1821), et en même temps (*) Terquem mentionne une démonstration de Lobatto et Bobillier, dans la *Correspondance mathématique* de Quetelet (t. IV; 1828); enfin, plus récemment, on a reproduit, dans les *Nouvelles Annales* (**), un autre calcul de M. Schlömilch pour établir que la moyenne géométrique est moindre que la moyenne arithmétique et supérieure à la moyenne harmonique. Quant au théorème de Cauchy, ne suffit-il pas de remarquer que le produit de m nombres, dont la moyenne arithmétique est donnée, est le plus grand possible lorsqu'ils sont tous égaux entre eux; or leur moyenne géométrique, c'est-

(*) *Nouvelles Annales*, 1re serie, t. I, p. 368.
(**) *Nouvelles Annales*, 1re série, t. XVIII, p. 353.

à-dire la racine $m^{\text{ième}}$ de leur produit, est alors précisément égale à leur moyenne arithmétique; donc elle lui est généralement inférieure, et alors il est très-facile d'établir l'ordre de grandeur relative des trois moyennes M_a, M_g, M_h.

On a, par définition

$$\frac{m}{M_h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \ldots + \frac{1}{k} + \frac{1}{l},$$

d'où

$$\frac{m}{M_h} = \frac{\Sigma(ab\ldots k)}{(M_g)^m};$$

le numérateur du second membre est ici la somme des m produits $m-1$ à $m-1$ des nombres $a, b, \ldots, k, l$. Or la moyenne arithmétique de ces produits est, en vertu du théorème de Cauchy, supérieure à leur moyenne géométrique, qui est elle-même égale à

$$\sqrt[m]{(M_g)^{m(m-1)}};$$

d'où l'on conclut aisément

$$M_h < M_g.$$

III. *Sur une question de licence.* — M. Besant, du collége de Cambridge, donne, sous le n° 17 de ses *Exercices,* les propositions suivantes :

« Si un arc donné d'une courbe roule, d'abord extérieurement, puis intérieurement, sur le même arc d'une courbe fixe, la somme des arcs des roulettes d'un même point est indépendante de la courbe fixe. La même indépendance existe aussi pour la somme des aires comprises entre les lignes joignant le point entraîné au point de contact. » (*Voir* les énoncés de M. Besant, *Nouvelles Annales,* 2e série, t. X, p. 475.)

Dès l'année 1868, M. Gigon a donné la démonstration de ces deux propositions dans les *Nouvelles Annales*

(2e série, t. VII, p. 463), et il fait suivre sa démonstration de la *remarque* suivante : « Ces deux propositions remarquables sont dues à M. Hennig ; mais la démonstration qui précède est différente de celle que cet auteur a publiée (*Journal de Crelle*, année 1865). »

D'après cela, on voit que MM. Hennig et Gigon ont ignoré que, dès l'année 1845, dans une *Note sur la théorie des épicycloïdes*, insérée au quatrième volume des *Nouvelles Annales* (1re série, p. 83), les deux théorèmes dont il s'agit ont été démontrés à l'aide d'une de ces considérations que Terquem appelait *intuitives*, et qui n'a exigé que quelques lignes de texte sans calcul ni figures. Les conséquences relatives à la rectification et à la quadrature soit des épicycloïdes et hypocycloïdes ordinaires ou allongées et accourcies, soit de quelques roulettes remarquables, sont présentées dans la même Note et de la même manière que les propositions principales. Mais il faut observer que la *Note* énonce ces deux propositions avec une circonstance dont l'omission dans les énoncés de M. Besant et dans la démonstration de M. Gigon (et dans celle de M. Hennig?) infirme la généralité des deux théorèmes.

Voici ce qui en est : il y a le roulement intérieur que M. Gigon caractérise très-clairement en disant que les centres de courbure de la courbe fixe et de la courbe mobile sont alors d'un même côté par rapport au point de contact ; mais, dans ce roulement même, il faut distinguer le cas où le rayon de courbure de la courbe mobile est plus petit que celui de la courbe fixe du cas où il est plus grand. C'est seulement au premier des deux cas que répond l'énoncé de Besant, et, pour l'exactitude, il faut dire avec la *Note* :

. . . *La* SOMME OU LA DIFFÉRENCE *des deux arcs décrits par un point quelconque du plan de la courbe mobile* *sera indépendante de la nature de la courbe fixe : la somme, si le rayon de courbure de la courbe fixe est, en chacun des points de contact, plus grand que celui de la courbe mobile; la différence, dans le cas contraire...* (et une même distinction pour *la somme ou la différence* des aires correspondantes).

On comprendra la nécessité de cette distinction, en observant que si, à partir de la circonstance où la courbe mobile aurait, en chacun des points de contact, une courbure plus grande, c'est-à-dire un rayon de courbure moindre que celui de la courbe fixe, on augmentait la courbure de celle-ci en diminuant ses cercles osculateurs, l'arc et l'aire correspondante produits par le roulement extérieur augmenteraient jusqu'à atteindre et ensuite dépasser les valeurs relatives au cas où, les deux courbes étant identiques, le roulement intérieur devient impossible et ne concourt plus à former les sommes fixes définies par les deux théorèmes.

La *Note* se terminait en proposant aux lecteurs des *Nouvelles Annales* la question de savoir s'il existe pour la sphère un théorème analogue à celui de Cardan, d'après lequel, sur le plan, tout point d'un cercle roulant intérieurement sur un cercle de rayon double décrit une ligne droite. Je ne sache pas qu'il ait été répondu dans ce Recueil à cette question; mais M. Paul Serret l'a résolue habilement dans sa *Théorie géométrique et mécanique des lignes à double courbure*, p. 54. J'ajoute qu'en 1855 le même auteur, dans son savant traité *Des méthodes en Géométrie*, avait emprunté aux *Nouvelles Annales* les deux théorèmes proposés plus tard par M. Besant, et en avait donné (p. 136) une démonstration détaillée.