NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LAGUERRE

Mémoire sur l'emploi des imaginaires dans la géométrie de l'espace

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 11 (1872), p. 241-254

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__241_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1872, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

MÉMOIRE SUR L'EMPLOI DES IMAGINAIRES DANS LA GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE

(voir même tome, p. 108);

PAR M. LAGUERRE.

13. Parmi l'infinité de surfaces dérivées d'une courbe gauche G, se trouve en particulier la *développable isotrope*, circonscrite à cette courbe; j'entends par là la surface développable circonscrite à la fois à l'ombilicale et à la courbe donnée. Tous les plans qui lui sont tangents sont, par conséquent, des plans isotropes, et ses génératrices, comme nous allons le voir, sont des droites isotropes.

Soit m un point quelconque de G; pour construire les génératrices de la surface développable isotrope qui passent en ce point, menons la tangente à la courbe en m, et soit t le point où cette tangente perce le plan de l'infini. Menons par t les deux tangentes à l'ombilicale Ω et soient a et b leurs points de contact. Les plans tma et tmb sont deux plans isotropes tangents à la courbe G, et les génératrices correspondantes de la développable sont les droites isotropes ma et mb. Remarquons maintenant que, la droite ab étant la polaire du point t par rapport à l'ombilicale, le plan mba est perpendiculaire à la tangente mt; les génératrices de la développable, qui passent au point m, sont donc les deux droites isotropes passant par ce point dans le plan normal à la courbe.

J'imagine maintenant une droite passant par le point m et par le point m', pris sur la courbe G, à une distance infiniment petite de m. Les cônes isotropes ayant ces deux points pour sommets se coupent suivant un cercle, dont le plan, perpendiculaire à mm', passe par le milieu de ce segment, et dont le rayon, égal à mm', est par conséquent infiniment petit. Le point m' venant à se confondre avec le point m, le plan du cercle d'intersection devient normal à la courbe au point m, le rayon de ce cercle devient nul et ce cercle se réduit à deux droites isotropes. Donc, quand une droite est tangente à une courbe gauche, le cercle, correspondant aux deux points de la courbe, qui sont réunis au point de contact, se compose des deux droites isotropes qui passent par ce point dans le plan normal à la courbe.

D'où cette conclusion : la développable isotrope, circonscrite à une courbe gauche, est la surface dérivée de cette courbe, lorsque la surface réglée, qui fixe le groupement de ses points, est la développable formée par les tangentes à la courbe.

Appliquons ces résultats à la recherche de la focale d'une courbe sphérique quelconque H ; on sait, d'ailleurs, que cette focale est la ligne double de la développable isotrope circonscrite à H.

En désignant par S la sphère qui contient cette courbe, pour qu'un point donné m soit situé sur une surface Σ dérivée de H, il est nécessaire et suffisant que le plan, associé au point m par rapport à la sphère (*), coupe la courbe H en deux points situés sur une génératrice de la surface réglée γ, qui détermine le groupement de points correspondant à la surface Σ. Si l'on considère en particulier la développable isotrope, qui correspond à la développable ayant H pour arête de rebroussement, pour qu'un point m soit situé sur cette développable isotrope, il faut et il suffit que le plan associé au point m soit tangent à la courbe H.

(*) Sur l'expression « plan associé à un point », *voir* n° 5.

Si m est un point de la focale, c'est-à-dire de la ligne double de la développable isotrope circonscrite à H, le plan associé à m est doublement tangent à H.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

La focale d'une courbe sphérique est le lieu des points associés (par rapport à la sphère qui contient la courbe) *aux divers plans doublement tangents à cette courbe.*

14. En particulier, supposons que la courbe donnée soit une biquadratique sphérique; on a, dans ce cas, quatre systèmes de plans doublement tangents à cette courbe et qui correspondent aux quatre cônes du second degré sur lesquels on peut la placer. La focale se compose donc de quatre biquadratiques sphériques. Pour les construire, considérons un de ces cônes K et son sommet O ; la biquadratique correspondante est le lieu des points associés aux plans tangents à ce cône. Ces plans tangents passant par le point fixe O, la courbe est située sur la sphère ayant ce point pour centre et coupant orthogonalement la sphère S, et elle est l'intersection de cette sphère par le cône supplémentaire du cône K dont le sommet est le centre de S.

Si la biquadratique donnée est une focale d'une surface anallagmatique, les quatre autres biquadratiques que l'on en déduit ainsi constituent avec elle la focale ordinaire de cette anallagmatique. On sait d'ailleurs que ces cinq courbes sont situées sur cinq surfaces du second degré homofocales ; les trois coniques focales communes à ces surfaces constituent la focale singulière de l'anallagmatique.

15. *Remarques sur la transformation par rayons vecteurs réciproques.* — Lorsqu'une surface passe par

l'ombilicale, sa focale complète se compose généralement de deux courbes distinctes (dont chacune peut elle-même se décomposer en plusieurs autres). Les plans isotropes tangents à la surface, dont le point de contact est à distance finie, enveloppent une développable dont la ligne double est la *focale ordinaire* de la surface; la développable circonscrite le long de l'ombilicale a pour ligne double la *focale singulière*.

Pour prendre l'exemple le plus simple, on voit que la focale ordinaire d'une anallagmatique se compose de cinq biquadratiques sphériques qui ont entre elles les relations que j'ai indiquées plus haut, et que sa focale singulière se compose de trois coniques.

Une surface du second degré n'a généralement pas de focale singulière et sa focale ordinaire se compose de trois coniques; une sphère n'a qu'une focale singulière qui se réduit à son centre.

Quand on transforme une surface par rayons vecteurs réciproques, on voit facilement que la focale ordinaire de la transformée est la transformée de la focale ordinaire de la surface primitive.

Mais il n'en est pas de même relativement à la focale singulière. Pour voir ce qui a lieu dans ce cas, je ferai remarquer que tout point (réel ou imaginaire) de l'espace situé à distance finie est représenté par un cercle de l'espace dont le rayon est fini et dont le centre est situé également à distance finie.

Généralement, un point situé à l'infini n'est pas susceptible de mode de représentation, le cercle qui le représenterait étant alors rejeté entièrement à l'infini; il faut le définir par l'une quelconque des droites qui s'y croisent.

Lorsque le point considéré dans le plan de l'infini se trouve sur l'ombilicale, le cercle qui le représente se réduit à une droite dont la direction seule est déterminée. Un point de l'ombilicale n'a donc pas, à proprement parler, de représentation; mais, si on le considère comme appartenant à une nappe d'une surface donnée, la droite qui le représente est alors déterminée; c'est la droite réelle du plan tangent à la nappe de la surface au point considéré.

Une sphère ayant une nappe unique, on voit que chaque point de l'ombilicale (considéré comme appartenant à la sphère) est représenté par une droite unique passant par le centre de cette sphère, si l'on suppose ce centre réel, en sorte que tous les points de l'ombilicale seront représentés par le système de toutes les droites qui rayonnent autour de ce point.

Une surface anallagmatique ayant deux nappes qui se coupent suivant l'ombilicale, chaque point de cette courbe est représenté par deux droites réelles; l'ensemble de toutes les droites que l'on obtient ainsi forme une *congruence* qui représente l'ombilicale.

Les considérations qui précèdent permettent d'établir facilement la proposition suivante :

Si l'on transforme une surface S *en* S' *par une transformation par rayons vecteurs réciproques; au moyen d'une sphère décrite autour d'un point* O *comme centre avec un rayon égal à* R,

1° *La focale ordinaire de* S *a pour transformée la focale ordinaire de* S'*;*

2° *Pour obtenir la focale singulière de* S' *considérons le cône isotrope ayant pour sommet le point* O; *il coupe* S *suivant une courbe à double courbure, à laquelle on peut circonscrire une infinité de plans doublement tangents enveloppant une surface développable* Σ.

La courbe polaire réciproque de cette surface, par *rapport à la sphère décrite du point O comme centre avec $\frac{R}{\sqrt{2}}$ comme rayon, est la focale cherchée.*

16. Si, en particulier, on considère une surface anallagmatique S, le cône isotrope ayant pour foyer le point O coupe l'anallagmatique suivant une biquadratique. La développable doublement circonscrite à cette courbe se compose de trois cônes du second degré, qui ont pour polaires, relativement à la sphère dont je viens de parler, les trois focales singulières de S'.

II.

PROPRIÉTÉS DES NORMALES AUX SURFACES ANALLAGMATIQUES (*).

Proposition fondamentale.

17. Je rappellerai d'abord quelques notions importantes relatives aux surfaces anallagmatiques.

On peut définir une surface anallagmatique Σ comme le lieu des points associés, par rapport à une sphère fixe S_1, des divers plans qui touchent une surface du second degré (ou *quadrique*) A_1.

L'intersection de S_1 et de A_1 est une biquadratique sphérique F_1 qui constitue l'une des focales ordinaires de Σ.

On sait, d'après M. Moutard, que la même surface est susceptible de quatre autres modes de génération semblables, au moyen de quatre autres quadriques A_2, A_3, A_4, A_5, et de quatre sphères correspondantes S_2, S_3, S_4, S_5.

(*) *Voir*, à ce sujet, *Bulletin de la Société Philomathique*, janvier 1868, ma *Note sur quelques propriétés des surfaces anallagmatiques*.

Les quatre biquadratiques F_2, F_3, F_4, F_5 suivant lesquelles se coupent respectivement ces quadriques et ces sphères, constituent avec F_1 la focale ordinaire complète de Σ, et toutes ces courbes sont reliées entre elles de la façon que j'ai indiquée dans le chapitre précédent.

Des nombreuses relations qui ont lieu entre ces diverses surfaces, je rappellerai seulement les suivantes, dont j'aurai besoin dans ce qui suit.

En désignant respectivement par O_1, O_2, O_3, O_4 et O_5 les cinq centres des sphères :

1° Quatre quelconques d'entre eux forment un tétraèdre conjugué par rapport à la sphère qui a pour centre le cinquième point et par rapport à la quadrique correspondante; ainsi le tétraèdre $O_1O_2O_3O_4$ est conjugue par rapport à S_5 et à A_5.

D'où il suit que O_5 est le point de rencontre des hauteurs du tétraèdre $O_1O_2O_3O_4$, ou encore que la droite O_4O_5 est perpendiculaire au plan $O_1O_2O_3$.

2° Deux quelconques des cinq sphères se coupent suivant un plan qui contient les centres des trois autres. Ainsi, le plan radical des sphères S_1 et S_2, que je désignerai par la notation P_{12}, est le plan $O_3O_4O_5$.

L'axe radical des trois sphères S_1, S_2 et S_3, que je désignerai par la notation D_{45}, est la droite O_4O_5.

18. Ceci posé, soient S_ι et $S_\prime$ deux sphères principales de l'anallagmatique Σ, et A_ι, $A_\prime$ les quadriques correspondantes.

M désignant un point quelconque de Σ et (M) le cône isotrope dont ce point est le sommet, le plan associé à M par rapport à S_ι touche A_ι en un point m_ι que l'on peut appeler le point correspondant de M sur A_ι; ce plan est d'ailleurs le plan radical de S_ι et de (M) considéré comme une sphère de rayon nul. De même, le plan associé à M par rapport à S_j touche A_j en un point m_j correspondant aussi à M, et ce plan est le plan radical de S_j et de (M).

D'après un théorème connu, ces deux plans radicaux se coupent sur le plan radical P_{ij} des deux sphères S_i et S_j.

On peut donc énoncer la proposition fondamentale suivante :

THÉORÈME I. — *Si l'on désigne par m_i et m_j deux points correspondants sur les quadriques A_i et A_j, les plans tangents en ces points se coupent suivant une droite* E *située dans le plan P_{ij}. La droite $m_i m_j$ est normale à l'anallagmatique Σ, et le pied de la normale est situé dans le plan mené par D_{ij}, perpendiculairement à* E.

Comme l'on a dix plans P_{ij}, on voit, d'après le théorème précédent, que le système des normales à une anallagmatique donnée peut être engendré de dix façons différentes, au moyen de deux quadriques homofocales. De là résultent encore d'autres modes de génération de ces droites, au moyen de trois ou de quatre quadriques.

Ce sont ces diverses conséquences que je me propose d'étudier et de développer dans les paragraphes qui suivent.

Génération du système des droites normales à une même surface anallagmatique au moyen de deux quadriques homofocales.

19. De la proposition qui précède, on déduit facilement le théorème suivant :

THÉORÈME II. — *Étant données deux quadriques homofocales A_1 et A_2 et un plan arbitraire P_{12}, si, de chaque droite* E *de ce plan on mène des plans tangents* *aux deux quadriques, et si l'on joint deux à deux les points de contact appartenant à des surfaces différentes, toutes les droites ainsi obtenues sont normales à une même surface anallagmatique* Σ.

J'ajouterai que *la surface* Σ *est le lieu des points d'intersection de chacune des normales avec le plan mené par la droite, qui est le lieu des pôles du plan* P_{12} *par rapport aux surfaces homofocales à* A_1 *et* A_2, *perpendiculairement à la droite* E *correspondant à la normale.* On a ainsi un mode simple et direct de génération de la congruence de droites formée par les normales à une anallagmatique; et, comme je l'ai fait remarquer, cette congruence peut être engendrée, de la même façon, de dix manières différentes.

Tout ceci se rattache à l'étude de deux complexes de droites remarquables, que l'on peut définir ainsi qu'il suit :

Étant données arbitrairement deux quadriques, et m, m' désignant deux points pris respectivement sur chacune de ces surfaces, le premier complexe est composé des droites mm' telles, que les plans tangents en ces points se coupent sur une droite fixe. Le deuxième complexe (réciproque du premier) est composé des droites d'intersection des plans tangents en m et en m' quand la droite mm' s'appuie sur une droite fixe.

20. La construction précédente donne, pour chaque point m de A_1, deux des normales à Σ qui s'y croisent; comme ces deux droites doivent être symétriques par rapport au plan tangent à ce point, on en déduit la proposition suivante :

Théorème III. — *Si, par une droite* D, *prise arbitrairement dans l'espace, on mène des plans tangents à deux quadriques homofocales* A_1, A_2, *et qui la touchent* *respectivement en p_1, q_1 et p_2, q_2, la normale menée en p_1 à la quadrique A_1 est dans le plan des deux droites $p_1 p_2$ et $p_1 q_2$, et fait avec elles des angles égaux.*

Si l'on considère le quadrilatère $p_1 q_1 p_2 q_2$, on voit que deux côtés consécutifs quelconques de ce quadrilatère, $p_1 q_1$ et $q_1 p_2$ par exemple, sont également inclinés sur la normale en q_1, et que leur plan contient cette normale ; d'où cette conséquence curieuse :

THÉORÈME IV (*). — *Étant données deux quadriques homofocales quelconques, si un rayon lumineux, mené d'une façon quelconque dans l'espace, se réfléchit une première fois sur la première surface, une seconde fois sur la deuxième, une troisième fois sur la première, et enfin une quatrième fois sur la deuxième, après ces quatre réflexions, il reprend la même route, en sorte que, quel que soit le nombre de réflexions analogues qu'il éprouve, il parcourt constamment les quatre côtés du même quadrilatère.*

En s'appuyant sur la théorie bien connue des caustiques, on déduit de là la proposition suivante, qui s'applique également aux coniques homofocales (**) et donne alors comme cas particulier la propriété focale qui sert de définition à l'ellipse et à l'hyperbole.

THÉORÈME V. — *Étant donnés deux quadriques homofocales quelconques, si, par une droite prise arbitrairement dans l'espace, on mène des plans qui touchent respectivement ces surfaces aux points p_1, p_2 et q_1, q_2, la somme de deux côtés consécutifs du quadri-*

(*) Il est bien clair que l'on doit choisir d'une façon convenable les points de réflexion ; de plus, on peut remarquer que deux des rayons réfléchis sont virtuels.

(**) Il est presque inutile de dire que tous les théorèmes énoncés dans ce Mémoire s'appliquent également aux anallagmatiques et aux coniques planes, ainsi qu'aux courbes sphériques analogues.

latère formé par ces quatre points est égale à la somme des deux autres, en sorte que l'on a

$$p_1 q_1 + q_1 p_1 = p_2 q_2 + q_2 p_1.$$

21. Aux propositions précédentes se rattache un mode de transformation de droites dans l'espace, qui mérite d'être signalé.

Étant données deux quadriques homofocales A et B et une droite quelconque D, considérons un des points où cette droite rencontre A, et soit a ce point; soit de même b un des points où la droite coupe B, les plans tangents en a et en b se coupent suivant une droite par laquelle on peut encore faire passer un plan tangent à A et un plan tangent à B; Δ désignant la droite qui joint leurs points de contact, je dirai que D et Δ sont des droites correspondantes conjuguées.

A une droite quelconque de l'espace D correspondent quatre droites Δ; si un rayon lumineux est dirigé suivant la droite D, après s'être réfléchi successivement sur chacune des deux quadriques, sa direction coïncidera avec celle d'une des droites conjuguées Δ, et l'on obtiendra ces quatre droites en choisissant, de toutes les façons possibles, les points où se fait la réflexion.

Du théorème de Malus, il résulte d'ailleurs que si un système de droites D est normal à une même surface, il en est de même des systèmes des droites conjuguées.

22. Le système des droites normales à une anallagmatique Σ étant défini comme je l'ai fait dans le § XIX au moyen des deux quadriques homofocales A_1 et A_2 et du plan fixe P_{12}, on peut se proposer de déterminer tous les autres éléments qui définissent Σ.

En conservant les notations du § XX, si l'on désigne en outre par K_j^i la conique suivant laquelle le plan P_{ij}

coupe la quadrique A_i, on obtiendra facilement les propositions suivantes :

Les centres O_1 *et* O_2 *des sphères correspondant aux quadriques* A_1 *et* A_2 *sont respectivement les pôles du plan* P_{12} *par rapport à ces surfaces. Les centres des trois autres sphères sont les points de rencontre des diagonales du quadrilatère complet formé par les quatre points d'intersection des coniques* K_2^1 *et* K_1^2.

Si l'on circonscrit une surface développable à la quadrique A_1 *et à la conique* K_1^2, *les trois autres coniques doubles de cette surface sont les coniques* K_1^3, K_1^4 *et* K_1^5, *et la développable est circonscrite à la sphère* S_1.

De là résulte, en particulier, une construction très-simple des diverses quadriques A_1, A_2, A_3, ..., lorsque la surface anallagmatique est définie par l'une d'elles et la sphère correspondante.

Théorème VI. — *Une surface anallagmatique étant définie par une surface du second degré et une sphère, la développable circonscrite à ces deux surfaces a quatre lignes doubles qui sont des coniques. D'après un théorème dû à M. Chasles, par chacune de ces coniques on peut faire passer une quadrique homofocale à la première; les cinq quadriques ainsi déterminées sont précisément celles au moyen desquelles on peut engendrer la surface.*

23. Le système des normales à une surface anallagmatique Σ peut être *en général* engendré de dix manières différentes par le mode de construction que j'ai indiqué ci-dessus.

Si la surface a un plan de symétrie, quatre de ces modes de génération ne peuvent être généralement appliqués et deviennent illusoires.

On peut, en effet, définir cette surface au moyen d'une quadrique et d'une sphère S ayant son centre dans un des plans de symétrie H de cette quadrique; les centres des autres sphères principales de l'anallagmatique sont les sommets des cônes passant par l'intersection de la quadrique et de la sphère S. Dans le cas considéré, l'un de ces centres étant à l'infini, la sphère, la quadrique et le plan fixe correspondant se confondent tous les trois avec le plan de symétrie H; la proposition fondamentale ne peut donc plus s'appliquer, et il est nécessaire d'étudier directement ce cas spécial.

Mais avant d'aborder cette étude je dois encore faire une remarque sur un cas singulier qui semble présenter quelque intérêt.

24. Les normales à une surface anallagmatique ayant trois plans de symétrie peuvent être considérées comme le lieu des diverses droites qui joignent les points de deux quadriques homofocales pour lesquels les plans tangents sont parallèles.

Considérons maintenant deux quadriques homofocales, et soit H un de leurs plans de symétrie; prenons une droite quelconque E située dans ce plan, et menons par cette droite des plans tangents à ces deux surfaces; les droites qui joignent les points de contact situés sur l'une des surfaces aux points de contact situés sur l'autre sont toutes normales à une même série de surfaces parallèles pour lesquelles on saura même déterminer les lignes de courbure.

Dans le cas général (celui où le plan H n'est pas un plan de symétrie), on sait que, parmi ces surfaces parallèles se trouve une anallagmatique; dans le cas singulier que je considère, cette anallagmatique est rejetée à l'infini.

Je remarque, en effet, que le lieu des pôles du plan H, par rapport aux quadriques homofocales aux quadriques données, est l'axe Oz perpendiculaire au plan de symétrie H; les points de contact des plans menés par E aux deux quadriques sont situés sur un cercle dont le plan est perpendiculaire à E, et, par conséquent, parallèle au plan mené par Oz, perpendiculairement à cette droite. Il en résulte, d'après la construction donnée dans le n° 16, que tous les points de l'anallagmatique sont rejetés à l'infini.

(*La suite prochainement.*)