NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ERNEST PADOVA

Démonstration de deux théorèmes de géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 11 (1872), p. 210-216

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__210_1>

DÉMONSTRATION DE DEUX THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. ERNEST PADOVA,
Élève à l'École Normale de Pise.

Si l'on représente par les deux équations

$$X'x + Y'y + Z'z + T't = 0,$$
$$X''x + Y''y + Z''z + T''t = 0,$$

une droite, on peut prendre pour coordonnées de la droite les quantités

$$J = Y'Z'' - Z'Y'', \quad G = Z'X'' - X'Z'', \quad H = X'Y'' - Y'X'',$$
$$L = X'T'' - T'X'', \quad M = Y'T'' - T'Y'', \quad N = Z'T'' - T'Z'',$$

entre lesquelles a lieu la relation

$$JL + GM + HN = 0,$$

parce que les rapports de cinq de ces quantités à la sixième déterminent complétement la position de la droite.

On pourrait prendre aussi, pour coordonnées de la droite, les six quantités

$$f = y'z'' - z'y'', \quad g = z'x'' - x'z'', \quad h = x'y'' - y'x'',$$
$$l = x't'' - t'x'', \quad m = y't'' - t'y'', \quad n = z't'' - t'z'',$$

entre lesquelles a lieu la relation

$$fl + gm + hn = 0,$$

où x', y', z', t' et x'', y'', z'', t'' représentent les coordonnées de deux points de la droite donnée.

1. Recherchons maintenant l'expression de la distance de deux points x_1, y_1, z_1, t_1 et x_2, y_2, z_2, t_2 au moyen de ces coordonnées f, g, h, l, m, n.

Pour cela, commençons par observer que la distance entre deux points en coordonnées quadrilinéaires peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} r^2 = -\frac{abcd}{9V^2}\Bigg[& \frac{\overline{AB}^2}{cd}(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + \frac{\overline{AC}^2}{bd}(x_1 - x_2)(z_1 - z_2) \\ & + \frac{\overline{AD}^2}{bc}(x_1 - x_2)(t_1 - t_2) + \frac{\overline{BC}^2}{ad}(y_1 - y_2)(z_1 - z_2) \\ & + \frac{\overline{BD}^2}{ac}(y_1 - y_2)(t_1 - t_2) + \frac{\overline{CD}^2}{ab}(z_1 - z_2)(t_1 - t_2)\Bigg], \end{aligned}$$

où a, b, c, d sont les faces du tétraèdre fondamental, où AB, AC, CB, AD, BD, CD en sont les arêtes, et où V en est le volume.

Pour transformer cette équation en coordonnées de droites, il convient de prendre pour coordonnées, non pas les simples distances x, y, z, t des points de quatre plans fixes, mais quatre autres variables qui sont liées à celles-ci par les relations

$$\xi = \frac{a}{3V}x, \quad \eta = \frac{b}{3V}y, \quad \zeta = \frac{c}{3V}z, \quad \tau = \frac{d}{3V}t,$$

et nous appellerons alors $f_1, g_1, h_1, l_1, m_1, n_1$ les quantités composées avec les ξ, η, ζ, τ comme les quantités f, g, h, l, m, n l'étaient avec x, y, z, t.

Nous aurons alors

$$\xi_1 + \eta_1 + \zeta_1 + \tau_1 = 1, \quad \xi_2 + \eta_2 + \zeta_2 + \tau_2 = 1,$$

et, par conséquent,

$$\xi_1 - \xi_2 = h_1 - g_1 + l_1, \quad \eta_1 - \eta_2 = -h_1 + f_1 + m_1,$$
$$\zeta_1 - \zeta_2 = g_1 - f_1 + n_1, \quad \tau_1 - \tau_2 = -l_1 - m_1 - n_1,$$

et, en substituant dans la précédente expression de r^2, nous aurons

$$\begin{aligned} r^2 = {} & g_1^2\overline{AC}^2 + h_1^2\overline{AB}^2 + f_1^2\overline{BC}^2 + l_1^2\overline{AD}^2 + m_1^2\overline{BD}^2 + n_1^2\overline{CD}^2 \\ & + 2\Sigma g_1 l_1 AC.AD\cos DAC \\ & + g_1 m_1\left(\overline{AB}^2 - \overline{AD}^2 - \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2\right) \\ & + h_1 n_1\left(\overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2 - \overline{BD}^2\right) \\ & + l_1 f_1\left(\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 - \overline{AB}^2 - \overline{CD}^2\right), \end{aligned}$$

où, pour bien entendre comment va être étendu le signe Σ, il faut supposer à chacune des coordonnées de la droite attaché un côté du tétraèdre (avec un signe déterminé), et que l'on fasse ensuite toutes les combinaisons possibles deux à deux des coordonnées de la droite, qui sont attachées à deux côtés du tétraèdre qui se rencontrent.

Pour voir ce que représentent les trois derniers termes de la précédente expression, projetons le triangle ABD sur la droite CD; on aura

$$AB\cos(AB, CD) = AD\cos ADC + DB\cos BDC.$$

Mais

$$2\,AD.CD\cos(ADC) = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 - \overline{AC}^2,$$
$$2\,BD.CD\cos(BDC) = \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 - \overline{BC}^2.$$

Nous aurons donc

$$2\,AB.CD\cos(AB, CD) = \overline{AD}^2 - \overline{AC}^2 - \overline{BD}^2 + \overline{BC}^2,$$

et semblablement

$$2\,AC.BD\cos(AC, BD) = \overline{AB}^2 - \overline{AD}^2 - \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2,$$
$$2\,AD.BC\cos(AD, BC) = \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 - \overline{CD}^2 + \overline{BD}^2,$$

de façon que la dernière équation devienne

$$r^2 = f_1^2\,\overline{BC}^2 + g_1^2\,\overline{AC}^2 + h_1^2\,\overline{AB}^2 + l_1^2\,\overline{AD}^2 + m_1^2\,\overline{BD}^2$$
$$+ n_1^2\,\overline{DC}^2 + 2\Sigma f_1 g_1\,AC.BC\cos(AC, BC),$$

où maintenant le signe Σ s'étend à toutes les combinaisons possibles des coordonnées de la droite, prises deux à deux.

2. Déterminons maintenant l'expression du volume de la pyramide qui a pour sommets les points $(xyzt)_1$, $(xyzt)_2$, $(xyzt)_3$, $(xyzt)_4$.

Soient G, H, J, E ces quatre points, et indiquons par KQ, KP, MQ, OM les traces des plans HGE, EGJ, HGJ, HJE sur le plan fondamental BCD, et soit N le point de rencontre des traces KP et OM. Le point N sera, par conséquent, la trace de la droite JE sur le plan BCD. Il est facile de voir, en regardant la figure, que parmi les pyramides formées par les plans du tétraèdre JEGH et le plan BCD existe la relation

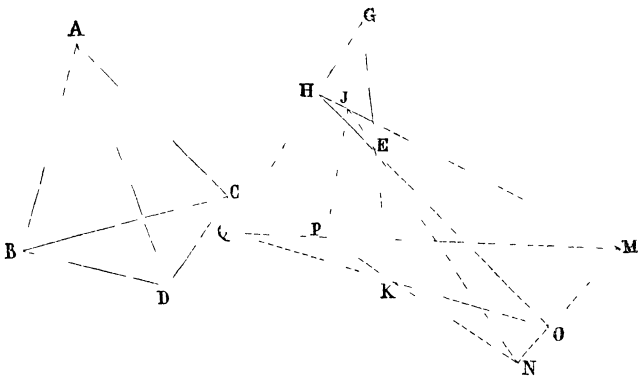
$$JEGH = JNPM + GKQP - HOQM - EKON,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\begin{aligned}\mathrm{JEGH} &= \tfrac{1}{3}(x_1\,\mathrm{KQP} + x_3\,\mathrm{NPM} - x_4\,\mathrm{KON} - x_2\,\mathrm{OQM})\\ &= \tfrac{1}{3}[\mathrm{KQP}(x_1 - x_2) + \mathrm{NPM}(x_3 - x_2) - \mathrm{KON}(x_4 - x_2)].\end{aligned}$$

Pour avoir les coordonnées du point P de rencontre de la droite JG avec le plan BCD, observons qu'en les appelant y_P, z_P, t_P, on a

$$\frac{y_3 - y_P}{y_1 - y_P} = \frac{x_3}{x_1}, \quad \frac{z_3 - z_P}{z_1 - z_P} = \frac{x_3}{x_1}, \quad \frac{t_3 - t_P}{t_1 - t_P} = \frac{x_3}{x_1},$$



d'où l'on tire

$$y_P = \frac{x_1 y_3 - y_1 x_3}{x_1 - x_3}, \quad z_P = \frac{x_1 z_3 - z_1 x_3}{x_1 - x_3}, \quad t_P = \frac{x_1 t_3 - t_1 x_3}{x_1 - x_3};$$

et l'on pourrait avoir de même les coordonnées des autres points où les arêtes de la pyramide EJGH percent le plan BCD. Si maintenant on considère les points du plan BCD par rapport au triangle BCD pris comme triangle fondamental d'un système de coordonnées trilinéaires, ils auront pour coordonnées

$$y' = \frac{y}{\sin \mathrm{CD}}, \quad z' = \frac{z}{\sin \mathrm{BD}}, \quad t' = \frac{t}{\sin \mathrm{BC}},$$

où CD, BD, BC représentent les angles dièdres qui ont pour arêtes CD, BD, BC respectivement. L'aire du triangle PQK est alors représentée par (Salmon, *Sections coniques*)

$$\frac{\mathrm{BD}.\mathrm{DC}.\mathrm{BC}}{8a^2 \sin\mathrm{BD}\sin\mathrm{DC}\sin\mathrm{BC}}\begin{vmatrix} y_\mathrm{P} & z_\mathrm{P} & t_\mathrm{P} \\ y_\mathrm{Q} & z_\mathrm{Q} & t_\mathrm{Q} \\ y_\mathrm{K} & z_\mathrm{K} & t_\mathrm{K} \end{vmatrix}.$$

Mais on a aussi, si X est l'ordonnée x du point A,

$$2c = \frac{\mathrm{X}.\mathrm{BD}}{\sin\mathrm{BD}}, \quad 2b = \frac{\mathrm{X}.\mathrm{DC}}{\sin\mathrm{DC}}, \quad 2d = \frac{\mathrm{X}.\mathrm{BC}}{\sin\mathrm{BC}},$$

de façon que

$$\mathrm{PQK} = \frac{abcd}{27\mathrm{V}^3}\,\frac{1}{(x_1-x_3)(x_2-x_1)(x_1-x_4)}\begin{vmatrix} y_1x_3-x_1y_3 & z_1x_3-x_1z_3 & t_1x_3-t_3x_1 \\ y_1x_2-x_1y_2 & z_1x_2-x_1z_2 & t_1x_2-t_2x_1 \\ y_4x_1-x_4y_1 & z_4x_1-x_4z_1 & t_4x_1-t_1x_4 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{abcd}{27\mathrm{V}^3}\,\frac{-x_1^2}{(x_1-x_3)(x_2-x_1)(x_1-x_4)}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & t_4 \end{vmatrix}.$$

De même, on aurait

$$\mathrm{NPM} = \frac{abcd}{27\mathrm{V}^3}\,\frac{x_3^2}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & t_4 \end{vmatrix},$$

$$\mathrm{KON} = \frac{abcd}{27\mathrm{V}^3}\,\frac{x_4^2}{(x_1-x_4)(x_3-x_4)(x_2-x_4)}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & t_4 \end{vmatrix}.$$

On aura donc

$$3\mathrm{JEGH} = \frac{abcd}{27\,\mathrm{V}^3}\left[\frac{x_3^2}{(x_3-x_1)(x_3-x_4)}\right.$$
$$\left. + \frac{x_1^2}{(x_1-x_3)(x_1-x_4)} + \frac{x_4^2}{(x_1-x_4)(x_3-x_4)}\right]$$
$$+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & t_4 \end{vmatrix} = \frac{abcd}{27\,\mathrm{V}^3}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & t_4 \end{vmatrix},$$

expression qui donne immédiatement la condition si connue pour que quatre points se trouvent sur un même plan.