NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PAINVIN

Étude d'un complexe du second ordre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 11 (1872), p. 202-210
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__202_1>

ÉTUDE D'UN COMPLEXE DU SECOND ORDRE

(suite, voir même tome, p 9),

PAR M. PAINVIN.

---

§ II.

15. Si, dans l'équation (3), n° 3, on regarde u_1, v_1, w_1 comme des coordonnées variables et qu'on supprime les indices, on a l'équation suivante :

$$(\Gamma) \quad (34) \quad \left\{ \begin{aligned} &\mathrm{A}(w_0 v - v_0 w)^2 + \mathrm{B}(u_0 w - w_0 u)^2 + \mathrm{C}(v_0 u - u_0 v)^2 \\ &\qquad - (u - u_0)^2 - (v - v_0)^2 - (w - w_0)^2 = 0, \end{aligned} \right.$$

laquelle représente une conique, enveloppe des droites du complexe situées dans le plan $\Pi(u_0, v_0, w_0)$; nous dirons que c'est une *conique du complexe,* et nous la désignerons par Γ.

Cette équation développée peut s'écrire

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} & u^2(Cv_0^2 + Bw_0^2 - 1) + v^2(Aw_0^2 + Cu_0^2 - 1) \\ & \quad + w^2(Bu_0^2 + Av_0^2 - 1) - 2Av_0w_0vw \\ & \quad - 2Bw_0u_0wu - 2Cu_0v_0uv + 2u_0u \\ & \quad + 2v_0v + 2w_0w - (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2) = 0. \end{aligned}\right.$$

Le centre de cette conique, ou le pôle du plan de l'infini, a pour équation

$$(36)\qquad u_0u + v_0v + w_0w - (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2) = 0;$$

ses coordonnées x_1, y_1, z_1 sont

$$(36\ bis)\qquad \frac{x_1}{u_0} = \frac{y_1}{v_0} = \frac{z_1}{w_0} = \frac{1}{u_0^2 + v_0^2 + w_0^2}:$$

on voit que ce sont les coordonnées du pied de la perpendiculaire abaissée du centre O de l'ellipsoïde sur le plan

$$(u_0, v_0, w_0) \quad \text{ou} \quad u_0x + v_0y + w_0z - 1 = 0.$$

Donc :

Théorème VI. — *Les droites du complexe, situées dans un plan fixe* Π, *enveloppent une conique* Γ *dont le centre est le pied de la perpendiculaire abaissée du centre* O *de l'ellipsoïde sur le plan* Π.

On voit, par l'équation (35) ou les valeurs (36 *bis*), que la conique Γ n'est jamais une parabole, tant que le plan Π n'est pas à l'infini, puisque cette conique ne peut pas être touchée par le plan de l'infini.

Quand le plan Π est à l'infini, la conique Γ devient le cercle imaginaire de l'infini.

16. L'équation tangentielle générale des surfaces homofocales de l'ellipsoïde donné est

$$(37)\qquad a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2-1+\lambda(u^2+v^2+w^2)=0,$$

λ étant un paramètre arbitraire.

Si l'on exprime que la surface (37) touche le plan (u_0, v_0, w_0), on a

$$(38)\qquad \lambda_0=-\frac{a^2u_0^2+b^2v_0^2+c^2w_0^2-1}{u_0^2+v_0^2+w_0^2};$$

λ_0 sera le *paramètre tangentiel* de la surface unique homofocale touchant le plan Π.

Soit J le point de contact; par le point J passent trois surfaces homofocales dont une touche le plan Π en J; une des normales, JC, à ces surfaces, sera perpendiculaire au plan Π, et les deux autres, JA et JB, seront dans ce plan. Si l'on imagine le cône du complexe ayant son sommet en J, les axes de ce cône seront les droites JA, JB, JC; le plan Π coupera le cône suivant deux génératrices tangentes à la conique Γ, dont le centre est le pied I de la perpendiculaire abaissée du centre O de l'ellipsoïde sur le plan; JA et JB seront les bissectrices de ce système de tangentes. Ajoutons de suite que JA et JB ne peuvent pas être parallèles aux axes de la conique Γ; car, s'il en était ainsi, JA, par exemple, par le centre I de la conique, et le plan AJC, qui est un des plans tangents aux surfaces homofocales passant par J, contiendrait le centre O de l'ellipsoïde, ce qui est évidemment impossible.

Le point J est le seul point du plan Π pour lequel deux des axes du cône du complexe, ayant son sommet en ce point, sont dans le plan Π lui-même; car il n'y a qu'une seule surface homofocale touchant le plan Π.

On peut se proposer de chercher quels sont les points d'un plan Π donné pour lesquels un des axes du cône du complexe correspondant à ces points se trouve dans le plan Π. Le lieu est une courbe du 3e ordre.

17. L'équation (35) de la conique peut s'écrire

$$(39)\quad \left\{\begin{aligned} &(u_0^2+v_0^2+w_0^2)(a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2-1)\\ &\quad+(a^2u_0^2+b^2v_0^2+c^2w_0^2-1)(u^2+v^2+w^2)\\ &\quad-2(u_0u+v_0v+w_0w)(a^2u_0u+b^2v_0v+c^2w_0w-1)=0.\end{aligned}\right.$$

Or les deux premiers groupes de termes de cette équation donnent, en égalant l'ensemble à zéro, une surface homofocale dont le *paramètre tangentiel* est égal et de signe contraire à celui de la surface homofocale touchant le plan donné; d'ailleurs

$$a^2u_0u+b^2v_0v+c^2w_0w-1=0$$

est le pôle du plan Π par rapport à l'ellipsoïde donné; l'équation

$$u_0u+v_0v+w_0w=0$$

est celle du point à l'infini sur une perpendiculaire au plan Π. D'après cela, l'équation (39) met en évidence la proposition suivante :

Théorème VII. — *La conique Γ du complexe, située dans un plan Π, est inscrite dans un cône ayant pour sommet le pôle du plan Π par rapport à l'ellipsoïde donné et circonscrit à une surface homofocale dont le* PARAMÈTRE TANGENTIEL *est égal et de signe contraire à celui de la surface homofocale qui touche le plan Π; elle est également inscrite dans un cylindre perpendiculaire au plan Π et circonscrit à la même surface homofocale que le cône précédent.*

18. Déterminons maintenant les longueurs des axes de la conique Γ représentée par l'équation (35). Je rap-

pellerai d'abord les formules suivantes, démontrées dans ma *Géométrie de l'espace*, p. 425 :

Si l'équation tangentielle d'une surface du 2e ordre est

$$\text{(I)}\quad \left\{\begin{aligned} &Au^2 + A'v^2 + A''w^2 + 2Bvw + 2B'wu + 2B''uv \\ &\qquad + 2Cu + 2C'v + 2C''w + D = 0, \end{aligned}\right.$$

l'équation aux carrés, ρ^2, des longueurs des axes sera

$$\text{(II)}\quad \left\{\begin{aligned} &D^4\rho^6 + D^2[D(A + A' + A'') - C^2 - C'^2 - C''^2]\rho^4 \\ &\quad + D[D(A'A'' - B^2 + A''A - B'^2 + AA' - B''^2) \\ &\qquad + 2(BC'C'' + B'C''C + B''CC') \\ &\qquad - C^2(A' + A'') - C'^2(A'' + A) \\ &\qquad\qquad - C''^2(A + A')]\rho^2 \\ &\qquad\qquad + \begin{vmatrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & D \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}\right.$$

La direction des axes étant définie par les équations

$$\text{(III)}\qquad \frac{\cos\alpha}{u} = \frac{\cos\beta}{v} = \frac{\cos\gamma}{w},$$

les quantités u, v, w seront déterminées à l'aide des équations

$$\text{(IV)}\quad \left\{\begin{aligned} &(A - k)u + B''v + B'w + C = 0, \\ &B''u + (A' - k)v + Bw + C' = 0, \\ &B'u + Bv + (A'' - k)w + C'' = 0, \\ &\qquad Cu + C'v + C''w + D = 0; \end{aligned}\right.$$

$$\text{(V)}\qquad \begin{vmatrix} A - k & B'' & B' & C \\ B'' & A' - k & B & C' \\ B' & B & A'' - k & C'' \\ C & C' & C'' & D \end{vmatrix} = 0.$$

19. **Appliquons ces formules à l'équation (35) de la conique Γ.**

Nous poserons :

$$(40)\quad \begin{cases} \mathcal{S} = u^2 + v^2 + w^2, & \text{cercle imaginaire de l'infini;} \\ \mathcal{G} = \mathrm{BC}u^2 + \mathrm{CA}v^2 + \mathrm{AB}w^2, & \text{section de la surface G par} \\ & \quad\text{le plan de l'infini;} \\ \mathfrak{H} = a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - 1, & \text{ellipsoïde donné;} \end{cases}$$

$\mathcal{S} = 0$ est l'équation tangentielle du cercle imaginaire de l'infini; $\mathcal{G} = 0$ est l'équation tangentielle de la section de la surface G par le plan de l'infini; $\mathfrak{H} = 0$ est l'équation tangentielle de l'ellipsoïde donné.

Nous poserons encore

$$(41)\quad \begin{cases} \mathrm{M} = e\mathcal{S}_0 + \mathfrak{H}_0 - 1, \\ \mathrm{N} = \mathcal{S}_0\mathcal{G}_0 - e\mathcal{S}_0 - \mathfrak{H}_0. \end{cases}$$

Les équations (I) et (V) deviennent alors respectivement, la première (I) :

$$(42)\quad \mathcal{S}_0^2\rho^4 - \mathcal{S}_0(e\mathcal{S}_0 + \mathfrak{H}_0 - 1)\rho^2 + (\mathcal{S}_0\mathcal{G}_0 - e\mathcal{S}_0 - \mathfrak{H}_0) = 0,$$

ou

$$(42\ bis)\qquad \mathcal{S}_0^2\rho^4 - \mathrm{M}\mathcal{S}_0\rho^2 + \mathrm{N} = 0;$$

la seconde (V) :

$$(43)\quad k^2 - (e\mathcal{S}_0 + \mathfrak{H}_0 - 1)k + (\mathcal{S}_0\mathcal{G}_0 - e\mathcal{S}_0 - \mathfrak{H}_0) = 0,$$

ou

$$(43\ bis)\qquad k^2 - \mathrm{M}k + \mathrm{N} = 0.$$

Ainsi *l'équation* (42), *ou* (42 *bis*), *donne les carrés des longueurs des axes de la conique* Γ, *située dans le plan* (u_0, v_0, w_0) ; *l'équation* (43), *ou* (43 *bis*), *donne la quantité k, qui permettra, à l'aide des relations* (III) *et* (IV), *n*° 15, *de déterminer les directions de ces axes.*

Le calcul qui conduit aux équations (42) et (43) n'étant ni long ni difficile, je me dispenserai d'en écrire les détails.

20. Avant de tirer de ces formules les propriétés fondamentales qu'elles renferment, je vais compléter ce premier calcul en déterminant la direction des axes de la conique Γ.

Après y avoir remplacé les coefficients A, A',... par ceux de l'équation (35) de la conique Γ, les trois premières équations (IV), n° 18, peuvent s'écrire

$$(1^\circ)\quad \left\{\begin{aligned} &[\mathcal{G}_0 - A(k+1)]u + Au_0 = u_0[BCu_0u + CAv_0v + ABw_0w],\\ &[\mathcal{G}_0 - B(k+1)]v + Bv_0 = v_0[BCu_0u + CAv_0v + ABw_0w],\\ &[\mathcal{G}_0 - C(k+1)]w + Cw_0 = w_0[BCu_0u + CAv_0v + ABw_0w];\end{aligned}\right.$$

d'où l'on déduit

$$(2^\circ)\quad \left\{\begin{aligned} [\mathcal{G}_0 - A(k+1)]\frac{u}{u_0} + A &= [\mathcal{G}_0 - B(k+1)]\frac{v}{v_0} + B\\ &= [\mathcal{G}_0 - C(k+1)]\frac{w}{w_0} + C.\end{aligned}\right.$$

En désignant par μ la valeur commune des rapports (2°), on en tire

$$(3^\circ)\quad \left\{\begin{aligned} u &= u_0\,\frac{\mu - A}{\mathcal{G}_0 - A(k+1)},\\ v &= v_0\,\frac{\mu - B}{\mathcal{G}_0 - B(k+1)},\\ w &= w_0\,\frac{\mu - C}{\mathcal{G}_0 - C(k+1)};\end{aligned}\right.$$

si l'on substitue ces valeurs dans les équations (1°), on constate qu'elles se réduisent à des identités, ce qui devait être.

Substituons alors dans la quatrième des équations (IV), n° 18, qui n'a pas encore été utilisée, et qui est, dans le cas actuel,

$$u_0 u + v_0 v + w_0 w - \mathcal{G}_0 = 0;$$

on trouve que, eu égard à l'équation (43 *bis*), le coefficient de μ, savoir :

$$\frac{u_0^2}{\mathcal{G}_0 - A(k+1)} + \frac{v_0^2}{\mathcal{G}_0 - B(k+1)} + \frac{w_0^2}{\mathcal{G}_0 - C(k+1)},$$

est nul; on a donc

$$\mu = \infty.$$

Or, d'après les équations (III), n° 18, on a

$$\frac{\cos\alpha[\mathcal{G}_0 - A(k+1)]}{u_0(\mu - A)} = \frac{\cos\beta[\mathcal{G}_0 - B(k+1)]}{v_0(\mu - B)} = \frac{\cos\gamma[\mathcal{G}_0 - C(k+1)]}{w_0(\mu - C)}.$$

Introduisons dans ces égalités la valeur $\mu = \infty$, on en conclut que *les angles* α, β, γ *de la conique* (Γ) *avec les axes sont déterminés par les équations*

$$(44)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\cos\alpha[\mathcal{G}_0 - A(k+1)]}{u_0} = \frac{\cos\beta[\mathcal{G}_0 - B(k+1)]}{v_0} \\ &\qquad = \frac{\cos\gamma[\mathcal{G}_0 - C(k+1)]}{w_0}, \end{aligned} \right.$$

où k est une des racines de l'équation (43).

On peut encore *déterminer les axes de la conique* (Γ) *par les équations suivantes :*

$$(44\ bis)\quad \left\{ \begin{aligned} &u_0 x + v_0 y + w_0 z - 1 = 0, \\ &a_1^2[\mathcal{G}_0 - A(k+1)]\frac{x}{u_0} + b_1^2[\mathcal{G}_0 - B(k+1)]\frac{y}{v_0} \\ &\qquad + c_1^2[\mathcal{G}_0 - C(k+1)]\frac{z}{w_0} = 0. \end{aligned} \right.$$

La première de ces équations représente le plan de la conique; la seconde est celle d'un plan perpendiculaire à celui de la conique et parallèle à la direction (α, β, γ) des axes de la conique.

Dans ces équations, k désigne une des racines de l'équation (43), savoir :

$$(43) \quad k^2 - (e\mathcal{S}^0 + \mathfrak{H}_0 - 1)k + (\mathcal{S}_0\mathcal{G}_0 - e\mathcal{S}_0 - \mathfrak{H}_0) = 0.$$

On vérifie aisément que les deux plans (44 *bis*) sont perpendiculaires entre eux, ce qui doit avoir lieu d'après le théorème VI, n° 15.

(*La suite prochainement.*)