NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. RESAL

Étude géométrique sur le mouvement d’une sphère pesante glissant sur un plan horizontal

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 11 (1872), p. 193-202

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__193_0>

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE SUR LE MOUVEMENT D'UNE SPHÈRE PESANTE GLISSANT SUR UN PLAN HORIZONTAL ;

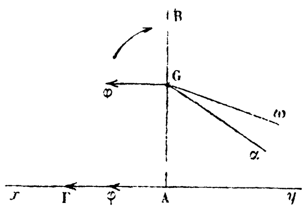
Par M. H. RESAL.

Il m'a paru intéressant de chercher à arriver géométriquement aux curieuses propriétés, toutes géométriques d'ailleurs, du mouvement d'une bille qui glisse sur un plan horizontal, propriétés auxquelles Coriolis est arrivé par une belle analyse, peut-être un peu difficile à suivre à cause du grand nombre de notations qu'elle comporte.

J'ai été conduit à un certain nombre de théorèmes qui avaient échappé aux investigations de Coriolis.

Je suppose que la sphère soit composée de couches concentriques homogènes, et je néglige le frottement de

Fig. 1.



roulement, eu égard à sa faible importance relative devant le frottement de glissement, ce qui revient à considérer la réaction normale du plan comme passant géométriquement par le point d'appui.

Soient (*fig.* 1) :

G le centre de figure de la sphère, qui est en même temps son centre de gravité;

A son point de contact avec le plan horizontal xy;

M sa masse;

R son rayon;

K^2MR^2 son moment d'inertie par rapport à un diamètre quelconque, K^2 étant égal à $\frac{2}{5}$ si la sphère est homogène;

F le frottement de glissement;

$G\omega$, $G\alpha$ les axes respectifs de la rotation instantanée ω et de l'accélération angulaire α : nous supposerons que le sens positif pour ω et α est celui pour lequel ces deux rotations ont lieu de la droite vers la gauche pour l'observateur couché suivant ωG et αG, en ayant les pieds en G;

φ l'accélération de G parallèle à F et de même sens.

D'après un principe connu, on a

$$F = M\varphi. \tag{1}$$

La force d'inertie d'un point quelconque m de M dans son mouvement autour de G considéré comme fixe est, comme on le sait, la résultante des forces semblables dues à l'accélération angulaire α et à la force centrifuge de m, résultant de la rotation ω autour de $G\omega$.

Les forces centrifuges s'entre-détruisant, et n'ayant ainsi aucune influence sur le mouvement de M autour de G, il est permis d'en faire abstraction. Les forces d'inertie dues à l'accélération angulaire ont pour moment $-K^2MR^2\alpha$, dont l'axe est $G\alpha$, et qui, ajouté géométriquement à celui de F, doit donner un résultat nul, ce qui exige que

$$-K^2MR^2\alpha + FR = 0,$$

ou

$$K^2MR\alpha = F, \tag{2}$$

et ce qui exprime que :

1° *L'axe de l'accélération angulaire est perpendiculaire au plan* GAF;

Et comme conséquence que :

2° *La composante de la rotation instantanée autour de la verticale est constante.*

Cette composante ne jouant aucun rôle au point de vue du glissement, et même sous celui du roulement, nous pouvons en faire abstraction et supposer horizontale la droite $G\omega$.

Les équations (1) et (2) donnent, par l'élimination de F,

$$-K^2R\alpha + \varphi = 0. \tag{3}$$

Portons verticalement au-dessus de G la longueur $GB = K^2R$, et considérons le point B comme appartenant à la verticale du centre de gravité au mouvement duquel il participe. Le point B suivra une courbe (B) identique à la trajectoire de G, mais comprise dans un autre plan horizontal.

Dans le mouvement de la sphère, l'accélération de celui m de ses points qui se trouve en B se compose de l'accélération horizontale $\varphi - \alpha GB$, qui est nulle d'après l'équation (3), et de l'accélération verticale $\omega^2 GB$. Or la première de ces accélérations est la résultante de l'accélération tangentielle et de la composante horizontale de l'accélération centripète de m sur sa trajectoire; et comme ces deux composantes sont rectangulaires, il faut que chacune d'elles soit nulle. Il suit de là que, en projection horizontale :

3° *Le point m décrit sur sa trajectoire deux chemins élémentaires égaux dans deux éléments égaux et successifs du temps, et qui sont en ligne droite, ce qui exige qu'en* B *la trajectoire présente en général un* *point d'inflexion, et que la vitesse atteigne un maximum ou un minimum;*

4° *Le plan osculateur de cette trajectoire en* B *est vertical, et l'accélération centripète correspondante a pour expression*

$$\omega^2 GB = \omega^2 K^2 R.$$

Soient (*fig.* 2) :

m'B, Bm''' les deux éléments consécutifs décrits par m avant d'avoir atteint le point d'inflexion B et au delà de ce point;

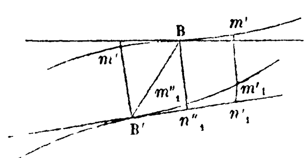
B$'$ la position de B au bout du temps dt;

m_1 le point qui passe par B$'$ quand m est en m''';

m'_1, m''_1 les positions de ce point contemporaines de celles m', B de m;

n'_1, n''_1 les projections de m'_1 et m''_1 sur la tangente en B$'$ à la trajectoire de m_1.

Fig. 2.



Comme la distance mm_1 reste invariable, on a, aux termes près du troisième ordre que nous négligerons,

$$m'm'_1 = Bm''_1 = m'''B' = m'n'_1 = Bn''_1,$$

et

$$B'm''_1 = B'n''_1 = m'_1 m''_1 = n'_1 n''_1.$$

La vitesse de m_1 en B$'$, étant maximum ou minimum, ne diffère de celle qu'il possède en m'_1 et m''_1 que des termes du second ordre; nous avons donc $n''_1 n'_1 = n''_1 B'$, aux termes près du troisième ordre. Il résulte de là que $B'm'''$, Bn''_1, $m'n'_1$ sont parallèles; qu'il en est de même de $m'''m'$ et $B'n'_1$, et enfin que $B'm''_1 = Bm'''$.

Donc :

5° *Les points décrivants de la courbe* (B), *considérés comme appartenant à la sphère, ont une vitesse constante en grandeur et en direction, et qui ne dépend que des conditions initiales du mouvement.*

On a aussi le théorème suivant :

6° *Si l'on fait abstraction de la composante centripète autour de* $G\omega$, *l'accélération d'un point quelconque est celle qui résulte de l'accélération angulaire transportée en* B *autour d'un axe* $B\alpha'$ *parallèle à* $G\alpha$. Ce théorème n'est qu'une conséquence immédiate de la composition de φ et α, considérés respectivement comme une translation et une rotation.

On déduit de là (*fig.* 1), en ayant égard à l'équation (3), que :

7° *La composante horizontale* Ψ *de l'accélération du point de contact* A *a pour expression*

$$\Psi = \alpha BA = \varphi\left(1 + \frac{1}{K^2}\right), \tag{4}$$

et qu'elle est dirigée dans le sens de la force F.

Les propriétés ci-dessus énoncées du mouvement de la sphère sont complétement indépendantes de la nature de la force F.

Avant de supposer que cette force est proportionnelle au poids du corps ou qu'elle est constante, nous établirons le théorème suivant, qui paraît presque évident, et qui peut permettre de simplifier certains problèmes relatifs au glissement d'un corps sur un plan :

8° *Si un solide terminé par une surface continue se meut de telle manière qu'une série d'éléments consécutifs de cette surface glissent successivement sur un plan, la vitesse de glissement* w *sera à chaque instant égale et parallèle à la vitesse d'un point géométrique* q *se mouvant en vertu de la vitesse initiale de glissement* w_0 *et de l'accélération du point de contact estimée dans le plan.*

Considérons, en effet, deux éléments consécutifs μ, μ' de la surface du corps qui viennent successivement se mettre en contact avec le plan, et soit (a) leur arête commune. La vitesse w' de chacun des points de (a) au bout du temps dt sera, en employant une notation connue (*),

$$\overline{w'} = \bar{w} + \overline{\Psi\, dt},$$

puisque les points appartiennent à μ. Mais les mêmes points de l'arête (a) doivent alors avoir la même vitesse translatoire que l'élément μ' auquel elle appartient : donc il suit que w' devient la vitesse de glissement de μ', et ainsi de suite.

Ainsi la variation géométrique de la vitesse de glissement au bout du temps dt est la même en grandeur et en direction que celle d'un point fictif q, animé primitivement de la vitesse w_0, et dont l'accélération serait constamment Ψ, ce qu'il fallait établir.

Corollaires. — Désignant par (q) la trajectoire du point q, on reconnaît sans peine que :

(*) *Voir* mon *Traité de Cinématique pure* pour ce qui est relatif aux sommes géométriques.

9° *La courbe (q) sera une parabole du second degré si l'accélération du point de contact est constante en grandeur et en direction ;*

10° *Le lieu (q) sera une droite si la direction de l'accélération Ψ coïncide à chaque instant avec celle de la vitesse de glissement. Dans le cas où l'accélération Ψ est constante, la vitesse de glissement suit la loi du mouvement uniformément varié.*

Revenons au cas de la sphère, et appelons f le coefficient de frottement de glissement, et g l'accélération de la pesanteur; nous aurons, puisque l'inertie n'influe en aucune façon sur la pression exercée sur le plan,

$$F = Mgf;$$

d'où

$$\Psi = \varphi\left(1 + \frac{1}{K^2}\right) = \frac{F}{M}\left(1 + \frac{1}{K^2}\right) = fg\left(1 + \frac{1}{K^2}\right).$$

Mais la force F, et par suite l'accélération Ψ, est dirigée en sens inverse de la vitesse de glissement w, ce qui prouve que (q) est une ligne droite et que la direction de w ou de F est constante (10°). Donc :

11° *Le frottement de glissement reste parallèle à une direction constante qui ne dépend que des conditions initiales du mouvement;*

12° *La vitesse de glissement suit la loi du mouvement uniformément retardé, et est représentée par la formule*

$$(5) \qquad w = w_0 - fg\left(1 + \frac{1}{K^2}\right)t,$$

w_0 étant sa valeur initiale ;

13° *Le temps t' au bout duquel cette vitesse est nulle,* *qui définit l'époque à laquelle commence le roulement, est donné par l'équation*

$$(6) \qquad t' = \frac{w_0}{fg\left(1+\frac{1}{K^2}\right)} \ (^*) ;$$

14° *Pendant le glissement, le centre de la sphère, par suite le point de contact géométrique, décrit une parabole du second degré* [théorème de J.-A. Euler (**)], ce qui n'est qu'une conséquence de ce que l'accélération Ψ est constante en grandeur et en direction.

Équation de la trajectoire parabolique. — Soient u_0 la vitesse constante en grandeur et en direction des points de la sphère qui se succèdent en B; v la vitesse du centre de gravité G. Nous allons chercher à exprimer v en fonction de u_0 et w.

Nous avons

$$(7) \qquad \begin{cases} \bar{u}_0 = \bar{v} + \bar{\omega}\,\mathrm{GB} = \bar{v} + \bar{\omega} K^2 R, \\ \bar{w} = \bar{v} - \omega\,\overline{\mathrm{GA}} = \bar{v} - \bar{\omega} R; \end{cases}$$

d'où, en multipliant la seconde équation par K^2 et l'ajoutant à la première,

$$(8) \qquad \bar{v} = \frac{\bar{u}_0 + K^2 \bar{w}}{1 + K^2}.$$

Soient maintenant A_0 la projection horizontale de la position initiale de G; A_0x, A_0y les parallèles aux directions de u_0 et w_0, v_0 la valeur initiale de v. Nous avons

(*) En supposant $K^2 = \frac{2}{5}$, on tombe sur un resultat obtenu par Coriolis par une methode indiquee plus loin.

(**) Jean-Albert Euler, fils du celèbre Leonard Euler, ne a Saint-Petersbourg en 1734, mort en 1800. Il entra a l'Academie de Berlin a l'âge de vingt ans, fut professeur de physique a Saint-Petersbourg et secretaire de l'Academie des Sciences de cette ville. Ses principaux Memoires ont ete publies dans les Recueils de Berlin, de Munich et de Gottingue.

vu plus haut que φ est constamment dirigée en sens inverse de $A_0 y$.

Les composantes de v_0 suivant $A_0 x$ et $A_0 y$ étant, d'après la formule (8),

$$\frac{u_0}{1+K^2}, \quad \frac{K^2 w_0}{1+K^2},$$

on a, en appelant x, y les coordonnées de la projection horizontale A de G au bout du temps t,

$$(9) \quad x = \frac{u_0}{1+K^2} t, \quad y = \frac{K^2 w_0}{1+K^2} t - \frac{\varphi t^2}{2} = \frac{K^2 w_0 t}{1+K^2} - fg \frac{t^2}{2};$$

d'où, par l'élimination de t, pour l'équation de la trajectoire de A,

$$(10) \qquad y = \frac{K^2 w_0 x}{u_0} - fg \frac{(1+K^2)}{2} \frac{x^2}{u_0^2}.$$

Des équations (8) et (9) on peut déduire facilement la valeur t' du temps au bout duquel le glissement cesse; car la première de ces équations donne, en supposant $w = 0$,

$$v = \frac{u_0}{1+K^2},$$

ce qui exprime que v devient parallèle à $A_0 x$, ou que $\frac{dy}{dx} = 0$. La seconde des équations (9) donne, par suite,

$$\frac{K^2 w_0}{1+K^2} = fgt';$$

d'où

$$t' = \frac{w_0}{fg\left(1+\frac{1}{K^2}\right)},$$

et l'on retombe ainsi sur la formule (6), que nous avons établie d'une autre manière.

Les coordonnées de l'extrémité de la trajectoire parabolique ou correspondant à la valeur ci-dessus du temps sont

$$x' = \frac{K^2 u_0 w_0}{(1+K^2)^2 fg}, \quad y' = \frac{K^4}{f(1+K^2)^2} \frac{w_0^2}{2g}.$$

Le rayon de courbure ρ en B de la trajectoire du point de la sphère qui passe par ce point au bout du temps t peut facilement se construire. Nous avons, en effet, d'après le théorème (4),

$$\frac{u_0^2}{\rho} = \omega^2 K^2 R.$$

Mais de la première équation (7) on tire

$$\omega^2 K^2 R = u_0 - \frac{dx}{dt} = \frac{K^2}{1+K^2} u_0;$$

d'où

$$\rho = \left(1 + \frac{1}{K^2}\right) u_0.$$

Ce rayon est donc constant.