H. BROCARD

Démonstration élémentaire des formules relatives à la sommation des piles de boulets

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 11 (1872), p. 169-172
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__169_1>

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE DES FORMULES RELATIVES A LA SOMMATION DES PILES DE BOULETS;

PAR M. H. BROCARD,
Capitaine du Génie, à Biskra.

Dans tous les cours de Mathématiques spéciales, on fait précéder la solution de ce problème de la recherche de la formule qui donne la somme des puissances semblables des termes d'une progression arithmétique. Cette méthode peut être simplifiée par une considération élémentaire.

Assimilons la pile de boulets à un prisme dans lequel chaque élément constituant serait une sorte de rhomboèdre qui tiendrait la place de chaque boulet, mais qui aurait l'avantage de pouvoir former, avec des éléments égaux, des tranches du prisme dont chacune renfermerait, par suite, autant de rhomboèdres qu'il y aurait de boulets. L'assimilation de la pile à un prisme est donc possible et, dès lors, la sommation se réduira à la recherche du volume d'un prisme oblique. Une déformation de ces rhomboèdres ne changera pas leur nombre; on peut donc appliquer à ces prismes obliques la formule qui convient à un prisme droit, c'est-à-dire que l'on regardera le nombre de boulets d'une face oblique comme représentant la surface de la section droite.

Cela posé, la formule générale sera dès lors

$$x = \frac{a + a' + a''}{3} \text{F},$$

F désignant le nombre de boulets renfermés dans une face triangulaire oblique; a, a', a'', les nombres de boulets formant les trois arêtes aboutissant à cette face (*).

Nous allons appliquer cette formule aux différents cas de la pratique et vérifier qu'elle conduit bien aux mêmes résultats.

1° Pile triangulaire :

$$\text{F} = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$a = 1, \quad a' = 1, \quad a'' = n,$$

$$x = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

(*) Cette formule se trouve, comme resultat empirique, à la page 197 des *Éléments d'Algèbre* de M. ROUCHE. (CH. B.)

2° Pile quadrangulaire :

$$F = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$a = n, \quad a' = 1, \quad a'' = n,$$

$$x = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3° Pile rectangulaire. — Les côtés de la base renferment m et n boulets. L'arête supérieure est donc composée de $(m - n + 1)$ boulets. Ainsi

$$F = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$a = m, \quad a' = m - n + 1, \quad a'' = m,$$

$$x = \frac{n(n+1)(3m - n + 1)}{6}.$$

4° Pile rectangulaire à retour d'équerre. — Soient m, m' n les nombres de boulets des deux grands côtés extérieurs et du petit côté. L'ensemble peut être regardé comme formé d'une pile rectangulaire dont la base a pour côtés m et n boulets, sur laquelle s'appuie une pile prismatique dont la base oblique a $\frac{m(n+1)}{2}$ boulets, chaque arête en renfermant $(m' - n)$. Mais celle-ci peut être placée sur le prolongement de la prèmière, et alors on forme ainsi une pile rectangulaire dont la base a $(m + m' - n)$ et n boulets. Le nombre total sera donc

$$x = \frac{n(n+1)(3m + 3m' - 4n + 1)}{6}.$$

On passera facilement au cas de la pile à retour d'équerre figurant un T, ou un double T, ou une croix, ou divers côtés d'un périmètre rectangulaire.

La méthode précédente est, comme on voit, très-simple, et facile à retenir et à exposer.