COMPAGNON

Démonstration du théorème fondamental relatif au pôle et à la polaire dans le cercle

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 11 (1872), p. 167-169

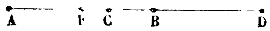
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__167_1>

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME FONDAMENTAL RELATIF AU POLE ET A LA POLAIRE DANS LE CERCLE;

PAR M. COMPAGNON,
Professeur au collége Stanislas.

Cette démonstration est fondée sur une proposition qui, je pense, n'a pas encore été remarquée et qui est un corollaire de ce théorème : *Si une droite* AB *est divisée harmoniquement par deux points* C *et* D, *la moitié de cette droite est moyenne proportionnelle entre les distances de son milieu* E *aux points conjugués.*

Fig. 1.



Voici ce corollaire : *Si une droite* AB *est divisée harmoniquement par deux points* C *et* D, *le produit des distances de l'un de ces points aux extrémités de cette droite est égal au produit des distances de ce même point au milieu de la droite et au second point conjugué.* Car on a

$$
\begin{aligned}
\mathrm{DA} \times \mathrm{DB} &= (\mathrm{DE} + \mathrm{AE})(\mathrm{DE} - \mathrm{AE}) \\
&= \overline{\mathrm{DE}}^2 - \overline{\mathrm{AE}}^2 \\
&= \overline{\mathrm{DE}}^2 - \mathrm{DE} \times \mathrm{EC} \\
&= \mathrm{DE} \times \mathrm{DC}.
\end{aligned}
$$

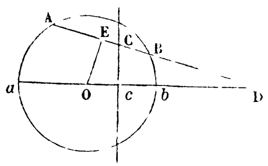
On aurait de même

$$\mathrm{CA} \times \mathrm{CB} = \mathrm{CE} \times \mathrm{CD}.$$

Cela posé, nous allons démontrer le théorème en question.

Théorème. — *Si, par un point* D *pris dans le plan d'un cercle* O, *on mène une sécante quelconque* DBA

Fig. 2.



et qu'on détermine le conjugué harmonique C *du point* D *par rapport à* AB, *le lieu géométrique du point* C, *lorsque la sécante tourne autour du point* D, *est une ligne droite perpendiculaire au diamètre ab qui passe par le point* D.

Déterminons le point c du lieu situé sur le diamètre ab, c'est-à-dire le conjugué harmonique du point D par rapport à ab; menons la droite Cc et abaissons OE perpendiculaire à la corde AB. Puisque le point E est le milieu de la droite AB divisée harmoniquement par les points C et D, on a

$$DA \times DB = DE \times DC.$$

De même,

$$Da \times Db = DO \times Dc.$$

Mais

$$DA \times DB = Da \times Db;$$

donc

$$DE \times DC = DO \times Dc.$$

De cette égalité il résulte que le quadrilatère OECc est inscriptible et, comme l'angle OEC est droit, l'angle OcC l'est pareillement; donc le lieu géométrique du point C est la droite Cc perpendiculaire à DO et passant par le point c conjugué harmonique du point D par rapport au diamètre ab.

Je laisse au lecteur le soin de démontrer ce théorème dans le cas où le point D est situé à l'intérieur du cercle.