

COMPAGNON

**Démonstration du théorème fondamental  
relatif au pôle et à la polaire dans le cercle**

*Nouvelles annales de mathématiques 2<sup>e</sup> série*, tome 11  
(1872), p. 167-169

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1872\\_2\\_11\\_\\_167\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__167_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1872, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

**DÉMONSTRATION DU THÉORÈME FONDAMENTAL  
RELATIF AU POLE ET A LA POLAIRE DANS LE CERCLE ;**

**PAR M. COMPAGNON,**  
Professeur au collège Stanislas.

---

Cette démonstration est fondée sur une proposition qui, je pense, n'a pas encore été remarquée et qui est un co-

rolaire de ce théorème : *Si une droite AB est divisée harmoniquement par deux points C et D, la moitié de cette droite est moyenne proportionnelle entre les distances de son milieu E aux points conjugués.*

Fig. 1.



Voici ce corollaire : *Si une droite AB est divisée harmoniquement par deux points C et D, le produit des distances de l'un de ces points aux extrémités de cette droite est égal au produit des distances de ce même point au milieu de la droite et au second point conjugué.*  
Car on a

$$\begin{aligned} DA \times DB &= (DE + AE)(DE - AE) \\ &= \overline{DE}^2 - \overline{AE}^2 \\ &= \overline{DE}^2 - DE \times EC \\ &= DE \times DC. \end{aligned}$$

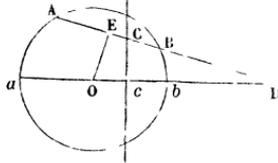
On aurait de même

$$CA \times CB = CE \times CD.$$

Cela posé, nous allons démontrer le théorème en question.

**THÉORÈME.** — *Si, par un point D pris dans le plan d'un cercle O, on mène une sécante quelconque DBA*

Fig. 2.



*et qu'on détermine le conjugué harmonique C du point D par rapport à AB, le lieu géométrique du point C,*

*lorsque la sécante tourne autour du point D, est une ligne droite perpendiculaire au diamètre  $ab$  qui passe par le point D.*

Déterminons le point  $c$  du lieu situé sur le diamètre  $ab$ , c'est-à-dire le conjugué harmonique du point D par rapport à  $ab$ ; menons la droite  $Cc$  et abaissons  $OE$  perpendiculaire à la corde  $AB$ . Puisque le point  $E$  est le milieu de la droite  $AB$  divisée harmoniquement par les points  $C$  et  $D$ , on a

$$DA \times DB = DE \times DC.$$

De même,

$$Da \times Db = DO \times Dc.$$

Mais

$$DA \times \overset{\cdot}{D}B = Da \times Db;$$

donc

$$DE \times DC = DO \times Dc.$$

De cette égalité il résulte que le quadrilatère  $OECc$  est inscriptible et, comme l'angle  $OEC$  est droit, l'angle  $OcC$  l'est pareillement; donc le lieu géométrique du point  $C$  est la droite  $Cc$  perpendiculaire à  $DO$  et passant par le point  $c$  conjugué harmonique du point D par rapport au diamètre  $ab$ .

Je laisse au lecteur le soin de démontrer ce théorème dans le cas où le point  $D$  est situé à l'intérieur du cercle.