Nouvelles annales de mathématiques

Laguerre

# Sur les propriétés des sections coniques qui se rattachent à l'intégration de l'équation d'Euler

*Nouvelles annales de mathématiques 2e série*, tome 11 (1872), p. 156-161

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__156_0>

# SUR LES PROPRIÉTÉS DES SECTIONS CONIQUES QUI SE RATTACHENT A L'INTEGRATION DE L'ÉQUATION D'EULER;

Par M. LAGUERRE.

1. Tous les géomètres connaissent, depuis les découvertes de Poncelet et de Jacobi, les liens étroits qui rattachent entre elles la théorie des fonctions elliptiques et les propriétés des polygones qui sont à la fois inscrits dans une section conique et circonscrits à une autre conique.

Bien que cette question soit maintenant parfaitement connue, je crois cependant, pour les lecteurs des *Nouvelles Annales*, devoir la développer dans tous ses détails.

2. Etant donnée une conique dont l'équation soit

$$f(x, y) = 0,$$

j'appelle *puissance* d'un point par rapport à cette conique la valeur que prend le polynôme $f(x, y)$, quand on substitue à $x$ et à $y$ les valeurs des coordonnées de ce point; et je m'appuierai principalement sur les deux lemmes suivants, dont le premier est une conséquence immédiate d'un théorème bien connu de Newton, sur les transversales des courbes algébriques.

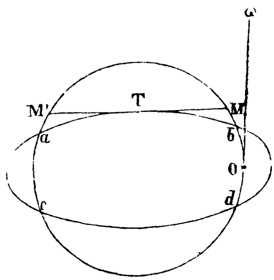
*Lemme I.* — Soient M et M′ deux points situés dans le plan d'une conique, et $\alpha$, $\beta$ les deux points où la droite MM′ coupe la conique; cela posé, les puissances des points M et M′, relativement à cette courbe, sont proportionnelles aux produits

$$M\alpha . M\beta \quad \text{et} \quad M'\alpha . M'\beta.$$

*Lemme II.* — Soient M et M′ deux points situés dans le plan d'une conique; si, par ces deux points, on mène un cercle quelconque qui coupe la conique en $a$, $b$, $c$, $d$, les puissances des points M et M′, par rapport à la conique, sont proportionnelles aux produits

$$Ma.Mb.Mc.Md \quad \text{et} \quad M'a.M'b.M'c.M'd \ (^*).$$

3. Cela posé, considérons un cercle et une conique se coupant aux points $a$, $b$, $c$ et $d$. Imaginons une tan-




gente mobile qui roule sur la conique; soit T le point où elle touche cette conique, et M, M′ les deux points où elle coupe le cercle.

Nous supposerons, pour plus de simplicité, le rayon du cercle pris pour unité, et nous fixerons la position de chaque point du cercle par l'angle que fait la droite, joignant le point donné à un point fixe O pris sur le cercle, avec la tangente O$\omega$ menée au cercle en ce point.

La tangente mobile occupant une certaine position, déplaçons-la infiniment peu; $\varphi$ et $\varphi'$ désignant les angles

(*) Voir, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, janvier 1865, ma Note sur les propriétés générales des courbes algébriques, et, *Nouvelles Annales*, 2e série, t. IX, p. 188, une Note de M. Grant intitulée : *Démonstration d'un théorème de géométrie*.

qui fixent les positions des points M et M',

$$2d\varphi \quad \text{et} \quad 2d\varphi'$$

mesureront les arcs décrits par ces points, et l'on aura évidemment

$$\frac{d\varphi}{\text{MT}} = \frac{d\varphi'}{\text{M'T}}.$$

Désignons, pour un instant, par

$$\pi(\text{M}) \quad \text{et} \quad \pi(\text{M}')$$

les puissances des points M et M' relativement à la conique; on a, en vertu du lemme I,

$$\frac{\pi(\text{M})}{\pi(\text{M}')} = \frac{\overline{\text{MT}}^2}{\overline{\text{M'T}}^2};$$

d'autre part, en vertu du lemme II,

$$\frac{\pi(\text{M})}{\pi(\text{M}')} = \frac{\text{M}a.\text{M}b.\text{M}c.\text{M}d}{\text{M}'a.\text{M}'b.\text{M}'c.\text{M}'d};$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\text{MT}}{\text{M'T}} = \frac{\sqrt{\text{M}a.\text{M}b.\text{M}c.\text{M}d}}{\sqrt{\text{M}'a.\text{M}'b.\text{M}'c.\text{M}'d}},$$

et, par conséquent,

$$(1) \qquad \frac{d\varphi}{\sqrt{\text{M}a.\text{M}b.\text{M}c.\text{M}d}} = \frac{d\varphi'}{\sqrt{\text{M}'a.\text{M}'b.\text{M}'c.\text{M}'d}}.$$

4. Désignons par

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \delta$$

les angles qui fixent les positions des points $a$, $b$, $c$, $d$ sur le cercle; nous aurons

$$\text{M}a = 2\sin(\varphi - \alpha), \quad \text{M}'a = 2\sin(\varphi' - \alpha), \ldots;$$

et l'équation précédente deviendra, en développant et divisant par $\cos^2\varphi$,

$$\frac{d\,\mathrm{tang}\,\varphi}{\sqrt{(\mathrm{tg}\,\varphi-\mathrm{tg}\,\alpha)(\mathrm{tg}\,\varphi-\mathrm{tg}\,\beta)(\mathrm{tg}\,\varphi-\mathrm{tg}\,\gamma)(\mathrm{tg}\,\varphi-\mathrm{tg}\,\delta)}}$$
$$=\frac{d\,\mathrm{tang}\,\varphi'}{\sqrt{(\mathrm{tg}\,\varphi'-\mathrm{tg}\,\alpha)(\mathrm{tg}\,\varphi'-\mathrm{tg}\,\beta)(\mathrm{tg}\,\varphi'-\mathrm{tg}\,\gamma)(\mathrm{tg}\,\varphi'-\mathrm{tg}\,\delta)}};$$

ou encore, en posant pour abréger

$$\mathrm{tang}\,\varphi=x,\quad \mathrm{tang}\,\varphi'=y,\quad \mathrm{tang}\,\alpha=\mathrm{A},\quad \mathrm{tang}\,\beta=\mathrm{B},\ldots,$$

$$(1)'\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{dx}{\sqrt{(x-\mathrm{A})(x-\mathrm{B})(x-\mathrm{C})(x-\mathrm{D})}}\\&=\frac{dy}{\sqrt{(y-\mathrm{A})(y-\mathrm{B})(y-\mathrm{C})(y-\mathrm{D})}};\end{aligned}\right.$$

c'est l'équation différentielle dont l'étude sert de base à la théorie des fonctions elliptiques, et qui a été intégrée pour la première fois par Euler.

3. Les considérations géométriques qui précèdent donnent immédiatement cette intégrale. On satisfait evidemment, en effet, à l'équation précédente [ou à l'équation (1)], si l'on suppose que les angles $\varphi$ et $\varphi'$ correspondent à deux points M et M′, tels que la corde MM′ enveloppe une conique passant par les points $a$, $b$, $c$ et $d$; comme l'équation des coniques qui passent par ces points renferme une constante arbitraire, on voit que l'on a l'intégrale générale de l'équation.

Considérons trois points quelconques $a$, $b$, $c$ communs au cercle et à la conique; on sait que, MT désignant une tangente quelconque à cette conique, et $(a)$, $(b)$, $(c)$ désignant les distances à cette droite des points $a$, $b$, $c$, on a, quelle que soit la tangente, la relation

$$\lambda\sqrt{(a)}+\mu\sqrt{(b)}+\nu\sqrt{(c)}=0,$$

où $\lambda$, $\mu$, $\nu$ désignent des quantités constantes pour la même conique, mais qui renferment une quantité arbitraire, si l'on considère toutes les coniques qui passent par les points $a$, $b$, $c$ et $d$.

Joignons aux points M et M' les points $a$, $b$ et $c$; les aires des triangles $MaM'$, $MbM'$, $McM'$, ayant même base, sont entre elles comme leurs hauteurs

$$(a),\quad (b),\quad (c);$$

les aires de ces triangles, dont les angles aux sommets sont égaux, sont entre elles comme les produits

$$aM.aM',\quad bM.bM',\quad cM.cM';$$

on a donc

$$\frac{(a)}{aM.aM'} = \frac{(b)}{bM.bM'} = \frac{(c)}{cM.cM'}.$$

D'où

$$\lambda\sqrt{aM.aM'} + \mu\sqrt{bM.bM'} + \nu\sqrt{cM.cM'} = 0,$$

et nous avons là l'intégrale générale des équations (1) et (1').

En introduisant les angles $\varphi$, $\varphi'$, $\alpha$,..., ou plutôt leurs tangentes $y$, $x$, A,..., elle prendra la forme connue (*)

$$\lambda\sqrt{(y-A)(x-A)} + \mu\sqrt{(y-B)(x-B)} + \nu\sqrt{(y-C)(x-C)} = 0.$$

6. La forme précédente de l'intégrale, bien qu'élégante, a le défaut de ne pas mettre en évidence la constante arbitraire qui y entre et de ne pas contenir symétriquement les quantités A, B, C, D.

Pour trouver une autre forme de l'intégrale, je prendrai pour point de départ la proposition suivante :

Théorème. — *Soit une conique passant par quatre points $a$, $b$, $c$ et $d$ d'un cercle; une tangente mobile roule sur cette conique. Si l'on désigne par* M *et* M' *les deux points où, dans une de ses positions, cette tangente*

(*) Darboux : *Recherches sur les surfaces orthogonales* (*Annales scientifiques de l'École Normale*, t. II.)

*coupe le cercle, et si l'on partage d'une façon quelconque en deux groupes a et b, c et d, les quatre points communs au cercle et à la conique, le rapport*

$$\frac{\sqrt{\mathrm{M}a.\mathrm{M}b.\mathrm{M}'c.\mathrm{M}'d} - \sqrt{\mathrm{M}c.\mathrm{M}d.\mathrm{M}'a.\mathrm{M}'b}}{\mathrm{MM}'}$$

*reste constant, lorsque la tangente se déplace tangentiellement à la conique.*

Il résulte de là que K désignant une constante arbitraire, l'intégrale de l'équation d'Euler est

$$\sqrt{\mathrm{M}a.\mathrm{M}b.\mathrm{M}'c.\mathrm{M}'d} - \sqrt{\mathrm{M}c.\mathrm{M}d.\mathrm{M}'a.\mathrm{M}'b} = \mathrm{K}.\mathrm{MM}',$$

ou encore, en introduisant les quantités $x$, $y$, A, B,...,

$$\sqrt{(x-\mathrm{A})(x-\mathrm{B})(y-\mathrm{C})(y-\mathrm{D})} \\ - \sqrt{(y-\mathrm{A})(y-\mathrm{B})(x-\mathrm{C})(x-\mathrm{D})} = \mathrm{K}(x-y).$$

7. Le résultat précédent, qui est peut-être nouveau, peut se mettre sous la forme suivante :

*Étant donnée l'équation*

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{f(y)}},$$

*où $f(x)$ représente un polynôme du quatrième degré en $x$, si l'on décompose d'une manière arbitraire le polynôme $f(x)$ en deux facteurs du second degré, en posant*

$$f(x) = \theta(x)\varphi(x),$$

*l'intégrale générale de cette équation est*

$$\frac{\sqrt{\theta(x)\varphi(y)} - \sqrt{\theta(y)\varphi(x)}}{x-y} = \mathrm{K},$$

K *désignant une constante arbitraire.*