NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

JOACHIMSTHAL

# Sur le nombre de normales réelles que l'on peut mener d'un point donné à un ellipsoïde

*Nouvelles annales de mathématiques 2e série*, tome 11 (1872), p. 149-155

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__149_0>

# SUR LE NOMBRE DE NORMALES RÉELLES QUE L'ON PEUT MENER D'UN POINT DONNÉ A UN ELLIPSOÏDE

(suite, voir même tome, p. 8),

Par JOACHIMSTHAL.

---

## V.

Soient $\alpha$ et $\beta$ les carrés des demi-axes de la section diamétrale de l'ellipsoïde parallèle au plan tangent à cette surface au point $(x_0, y_0, z_0)$ ; on a

$$(4^*)\qquad \left\{\begin{aligned} x_0^2 &= \frac{a(a-\alpha)(a-\beta)}{(a-b)(a-c)}, \\ y_0^2 &= \frac{b(b-\alpha)(b-\beta)}{(b-a)(b-c)}, \\ z_0^2 &= \frac{c(c-\alpha)(c-\beta)}{(c-a)(c-b)}. \end{aligned}\right.$$

Les rayons de courbure principaux en ce point sont $\frac{\alpha}{\pi}$ et $\frac{\beta}{\pi}$; de plus, on a

$$\pi^2\alpha\beta = abc.$$

En désignant par $(X, Y, Z)$ un des centres de courbure, on a

$$\frac{X-x_0}{\frac{x_0}{a}} = \frac{Y-y_0}{\frac{y_0}{b}} = \frac{Z-z_0}{\frac{z_0}{c}} = -\alpha \quad \text{ou} \quad -\beta;$$

et, par suite,

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} X^2 &= \frac{(a-u)^3(a-w)}{a(a-b)(a-c)}, \\ Y^2 &= \frac{(b-u)^3(b-w)}{b(b-a)(b-c)}, \\ Z^2 &= \frac{(c-u)^3(c-w)}{c(c-a)(c-b)}, \end{aligned}\right.$$

formules où l'on doit poser soit $u=\alpha$ et $w=\beta$, soit $u=\beta$ et $w=\alpha$, suivant celui des centres de courbure que l'on considère.

Lorsque l'on fait varier $u$ depuis $a$ jusqu'à $b$, pendant que $w$ varie depuis $b$ jusqu'à $c$, le lieu du point $(X, Y, Z)$ est une surface $F_1$, qui est le lieu des centres de courbure principaux maximum; si, au contraire, on fait varier $u$ de $b$ à $c$ et $w$ de $a$ à $b$, le lieu est une seconde surface $F_2$, qui est le lieu des centres de courbure principaux minimum; $F_1$ et $F_2$ sont les deux nappes d'une même surface, lieu des centres de courbure principaux de l'ellipsoïde, dont l'équation s'obtiendrait en éliminant $u$ et $w$ entre les équations (18).

Toute droite menée par l'origine des coordonnées rencontre $F_1$ (et de même $F_2$) en deux points également distants de cette origine.

En effet, si l'on pose

$$\frac{X}{l} = \frac{Y}{m} = \frac{Z}{n},$$

$l$, $m$ et $n$ désignant des constantes, $u$ et $w$ sont déterminées par les équations suivantes

$$(19)\quad l^2 : m^2 : n^2 = \frac{(a-u)^3(a-w)}{a(a-b)(a-c)} : \frac{(b-u)^3(b-w)}{b(b-a)(b-c)} : \frac{(c-u)^3(c-w)}{c(c-a)(c-b)};$$

d'où l'on déduit

$$(20)\qquad \frac{al^2}{(a-u)^3}+\frac{bm^2}{(b-u)^3}+\frac{cm^2}{(c-u)^3}=0.$$

Un mode de discussion bien connu fait voir immédiatement que cette équation n'a que deux racines réelles, l'une comprise entre $a$ et $b$, l'autre comprise entre $b$ et $c$.

De l'équation (19) on déduit qu'à toute valeur réelle de $u$, comprise entre $a$ et $b$, correspond une valeur réelle de $v$ comprise entre $b$ et $c$, et qu'à toute valeur réelle de $u$ comprise entre $b$ et $c$ correspond une valeur réelle de $v$ comprise entre $a$ et $b$. Par suite, $F_1$ et $F_2$ sont des surfaces fermées.

Cherchons maintenant à déterminer les intersections de la normale à l'ellipsoïde au point $(x_0, y_0, z_0)$ avec les surfaces $F_1$ et $F_2$.

X, Y, Z désignant les coordonnées d'un des points d'intersection, outre les équations (18), on doit encore avoir les équations

$$\frac{X-x_0}{\frac{x_0}{a}}=\frac{Y-y_0}{\frac{y_0}{b}}=\frac{Z-z_0}{\frac{z_0}{c}}=-v.$$

Si nous tirons de là les valeurs de X, Y, Z pour les porter dans les équations (18), $u$, $w$ et $v$ seront déterminés par les relations

$$(21)\qquad \begin{cases}(a-u)^3(a-w)=(a-v)^2(a-\alpha)(a-\beta),\\(b-u)^3(b-w)=(b-v)^2(b-\alpha)(b-\beta),\\(c-u)^3(c-w)=(c-v)^2(c-\alpha)(c-\beta).\end{cases}$$

Pour $u=a$, la première de ces équations donne $v=a$, et les deux autres

$$-w=a-\alpha-\beta+\frac{(a-\alpha)(a-\beta)}{b-a},$$

$$-w=a-\alpha-\beta+\frac{(a-\alpha)(a-\beta)}{c-a},$$

résultats qui impliquent une contradiction, puisque $(a-\alpha)$ et $(a-\beta)$ sont différents de zéro; le même fait a lieu lorsque l'on pose

$$u=b \quad \text{et} \quad u=c.$$

Des équations (21) on tire les relations suivantes

$$(22)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{(a-v)^2(a-\alpha)(a-\beta)}{(a-u)^2(a-b)(a-c)}+\frac{(b-v)^2(b-\alpha)(b-\beta)}{(b-u^2)(b-a)(b-c)} \\ &\qquad +\frac{(c-v)^2(c-\alpha)(c-\beta)}{(b-u)^2(c-a)(c-b)}-1=0, \end{aligned} \right.$$

$$(23)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{(a-v)^2(a-\alpha)(a-\beta)}{(a-u)^3(a-b)(a-c)}+\frac{(b-v)^2(b-\alpha)(b-\beta)}{(b-u)^3(b-a)(b-c)} \\ &\qquad +\frac{(c-v)^3(c-\alpha)(c-\beta)}{(c-u)^3(c-a)(c-b)}=0. \end{aligned} \right.$$

Réciproquement, de ces deux relations on peut déduire les équations (21); car $(a-b)$, $(b-c)$, $(c-a)$, étant différents de zéro, on peut toujours mettre trois grandeurs arbitraires $\gamma$, $\gamma'$ et $\gamma''$, sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \gamma &= \varepsilon+\varepsilon' a+\varepsilon'' a^2, \\ \gamma' &= \varepsilon+\varepsilon' b+\varepsilon'' b^2, \\ \gamma'' &= \varepsilon+\varepsilon' c+\varepsilon'' c^2. \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant écrire les relations (22) et (23) sous la forme suivante

$$\frac{\gamma}{(a-b)(a-c)}+\frac{\gamma'}{(b-a)(b-c)}+\frac{\gamma''}{(c-a)(c-b)}=1,$$

et

$$\begin{aligned} &\frac{\gamma}{(a-b)(a-c)}\,\frac{1}{a-u}+\frac{\gamma'}{(b-a)(b-c)}\,\frac{1}{b-u} \\ &\qquad +\frac{\gamma''}{(c-a)(c-b)}\,\frac{1}{c-u}=0. \end{aligned}$$

Si nous donnons à $\gamma$, $\gamma'$ et $\gamma''$ les valeurs précédentes, on voit que $\varepsilon''$ est égal à 1, et que $\gamma, \gamma'$ et $\gamma''$ doivent être respectivement égaux à $(a-u)(a-w)$, $(b-u)(b-w)$, $(c-u)(c-w)$.

Remarquons maintenant que $z_1$ étant une racine double de l'équation $f(z)=0$, qui n'annule pas la fonction entière $F(z)$, on a à la fois

$$\frac{f(z)}{F(z)}=0 \quad \text{et} \quad \frac{d\,\dfrac{f(z)}{F(z)}}{dz}=0;$$

d'après cela, on doit prendre pour $v$ les valeurs pour lesquelles l'équation (22) acquiert des racines égales, et pour $u$ la valeur commune à ces racines, à l'exception, toutefois, des valeurs $a$, $b$ et $c$.

L'équation (22) ne diffère pas de l'équation (5), que, d'après les considérations exposées aux §§ I et II, on peut écrire de la façon suivante

$$\frac{(u-v)^2(u-\alpha)(u-\beta)}{(u-a)(u-b)(u-c)} \times\left(\frac{1}{u-a}+\frac{1}{u-b}+\frac{1}{u-c}-\frac{1}{u-\alpha}-\frac{1}{u-\beta}-\frac{2}{u-v}\right)=0,$$

ou encore

$$\frac{(u-v)}{(u-a)^2(u-b)^2(u-c)^2} \times[W(u-v)-2(u-a)(u-b)(u-c)(u-\alpha)(u-\beta)]=0.$$

Pour que cette équation ait une racine double, il faut que l'on ait $u=v$ (alors on a $u=\alpha$ ou $u=\beta$, puisque l'on exclut les valeurs $a$, $b$ et $c$), ou bien que le second facteur ait une racine double.

On a, dans ce cas,

$$\frac{1}{u-a}+\frac{1}{u-b}+\frac{1}{u-c}-\frac{1}{u-\alpha}-\frac{1}{u-\beta}-\frac{2}{u-v}=0,$$

et

$$\frac{1}{(u-a)^2}+\frac{1}{(u-b)^2}+\frac{1}{(u-c)^2}-\frac{1}{(u-\alpha)^2}-\frac{1}{(u-\beta)^2}-\frac{2}{(u-v)^2}=0;$$

on est ainsi ramené à la considération de l'équation (10) déjà traitée.

Les équations (22) et (23) ont les six solutions communes

$$v=\beta,\ v_1,\ v_2,\ \alpha,\ v_3,\ v_4,$$
$$u=\beta,\ u_1,\ u_2,\ \alpha,\ u_3,\ u_4.$$

A chaque couple de valeurs de $u$ et $v$ correspond, d'après l'équation (21), une valeur réelle de $w$, qui est comprise entre $a$ et $b$, si $u$ est comprise entre $b$ et $c$, et réciproquement.

La normale au point $(x_0, y_0, z_0)$ de l'ellipsoïde rencontre la surface $F_1$ aux trois points désignés par $(\alpha)$, $(v_3)$ et $(v_4)$ dans le § IV, et la surface $F_2$ aux trois points désignés par $(\beta)$, $(v_1)$ et $(v_2)$.

La normale a, avec chacune de ces surfaces, un nombre impair de points communs, parce qu'elle les touche toutes les deux, à savoir : F en $(\alpha)$ et en $F_2$ $(\beta)$. Pour le voir analytiquement, on peut se reporter aux formules (18), on remarque immédiatement que le discriminant de (5) ou de

$$(u-v)[W(u-v)-2(u-a)(u-b)(u-c)(u-\alpha)(u-\beta])$$

contient évidemment les facteurs quadratiques $(v-\alpha)^2$ et $(v-\beta)^2$.

Mais comme cette circonstance importe peu dans la présente recherche, nous n'insisterons pas sur ce point.

Les résultats obtenus dans le § IV peuvent s'énoncer de la façon suivante :

Toute normale à l'ellipsoïde qui n'est pas dans le plan d'une section principale rencontre chacune des nappes $F_1$ et $F_2$ de la surface lieu des centres de courbure, abstraction faite des centres de courbure principaux $(\alpha)$ et $(\beta)$ relatifs à la normale considérée, en deux autres points $(\nu_3)$ et $(\nu_4)$, et $(\nu_1)$ et $(\nu_2)$. Chacune des cordes interceptées sur la normale par les nappes $F_1$ et $F_2$ contient un des points $(\alpha)$ et $(\beta)$; de plus, ces deux cordes sont contiguës, c'est-à-dire qu'elles ont une partie commune, ou bien que l'une renferme l'autre.

D'un point donné, on peut mener à l'ellipsoïde un nombre de normales réelles égales à six, quatre ou deux, suivant que le point se trouve à l'intérieur des surfaces $F_1$ et $F_2$, à l'intérieur de l'une et à l'extérieur de l'autre, ou enfin à l'extérieur de ces deux surfaces.

*Remarque.* — Pour compléter ces résultats, il faut encore considérer le cas où le point donné se trouve dans le plan d'une des sections principales.

Le plan des $(xy)$ coupe les surfaces $F_1$ et $F_2$ suivant les courbes

$$(24) \qquad (ax^2)^{\frac{1}{3}} + (by^2)^{\frac{1}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{1}{3}},$$

$$(25) \qquad \frac{ax^2}{(a-c)^2} + \frac{by^2}{(b-c)^2} = 1.$$

Des pieds des normales passant par le point $(\xi, \eta)$, quatre sont situés dans le plan des $(xy)$, et leur réalité dépend de la position du point par rapport à la courbe (24). Les deux autres sont en dehors du plan des $(xy)$ et leur réalité dépend de la position du point par rapport à la courbe (25).