NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

KOEHLER

Mémoire sur la théorie géométrique des courbes du troisième ordre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 11 (1872), p. 122-126

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__122_0>

MÉMOIRE SUR LA THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DES COURBES DU TROISIÈME ORDRE

(suite et fin, voir même tome, p. 66);

PAR M. KOEHLER.

XI. *Courbe hessienne.* — Imaginons le faisceau des polaires coniques de tous les points d'une droite; aux points a, a', a'',... correspondent sans ambiguïté des coniques C, C', C'',..., et réciproquement. La série a, a', a'',... et la série C, C', C'',... sont homographiques, ou, en d'autres termes, le rapport anharmonique de quatre points d'une droite est égal à celui de leurs quatre polaires; on aura donc facilement les trois points correspondants aux trois coniques formées par les couples de côtés opposés et par les diagonales du quadrilatère, base du faisceau (il suffira pour cela de déterminer les polaires de trois points quelconques de la droite). On conclut de là que le lieu des points dont les polaires coniques se réduisent à des systèmes de deux droites est une courbe du troisième ordre, puisque sur une droite quelconque il y a toujours trois points du lieu. Cette courbe est la hessienne de la cubique donnée; elle la coupe en ses points d'inflexion et au point double, s'il existe.

Les points d'inflexion d'une cubique sont aussi des points d'inflexion de sa hessienne. — Menons la corde de contact d'un point d'inflexion I, et soient a, b, c les points où cette corde rencontre la courbe. Si un point P parcourt abc, ses conjugués relatifs à a, b, c forment une série de segments en involution; soient π, π' les positions de P qui correspondent aux points doubles. Il est évident que les droites $I\pi$, $I\pi'$ sont des tangentes à la hessienne. Si l'on cherche, en effet, les deux points autres que I situés sur une de ces droites, on trouvera deux points confondus en un seul, parce que les cordes communes des polaires de tous les points de $I\pi$ ou $I\pi'$ ne constituent plus que deux systèmes distincts, savoir : la droite It, tangente d'inflexion, et la corde abc d'une part, de l'autre les deux droites issues de p (ou de p'), et formant deux groupes de cordes communes confondus en un seul.

La tangente d'inflexion It est aussi une tangente à la hessienne, car les polaires de tous les points de cette droite la touchent en I et passent par deux points situés sur abc; on a donc encore deux systèmes de cordes communes coïncidents, et par suite deux points de la hessienne confondus en un seul. Considérons enfin la droite It', axe des moyennes harmoniques de It par rapport à Ia, Ib, Ic; on voit facilement que les polaires de tous les points de It' sont tangentes en t à la droite It (*); elles ont un autre point commun sur abc, et ne peuvent en avoir en dehors de cette droite, puisque les pôles harmoniques de toute droite passant en I appartiennent à la polaire (It, abc) de ce point. Elles ont donc un contact du second ordre en t, suivant It, et n'ont qu'un seul système de cordes communes, savoir It et $tabc$. Donc sur la droite It' on n'aura qu'un point de la hessienne : ce sera le point I, qu'on sait déjà lui appartenir, et It' sera une tangente d'inflexion.

Remarque. — I et t sont les points doubles de l'involution déterminée sur It par les polaires des points de abc. Si l'on considère un point quelconque du plan, sa

(*) Le point t est l'intersection de la tangente d'inflexion et de la corde de contact.

polaire coupera It suivant un des segments de l'involution. Ainsi la polaire d'un point quelconque intercepte sur une tangente d'inflexion un segment qui est divisé harmoniquement par le point d'inflexion et par le point où cette tangente coupe la corde de contact. Une propriété analogue existe pour la corde de contact; les points π, π' divisent harmoniquement le segment intercepté par la polaire d'un point quelconque. Ces points sont d'ailleurs imaginaires quand a, b, c sont réels.

XII. *Faisceaux de cubiques passant par neuf points.* — Lorsque plusieurs cubiques ont neuf points communs, les polaires d'un point quelconque forment un faisceau de coniques passant par quatre points. Soit a un des points d'intersection des polaires d'un point P par rapport à deux des cubiques du faisceau considéré; il est évident que, si l'on mène deux transversales aB, aC passant par deux des neuf points communs, les cubiques intercepteront sur ces transversales deux séries de segments en involution bb_1, $b'b'_1$, $b''b''_1$, ..., cc_1, $c'c'_1$, $c''c''_1$, ... Prenons les centres des moyennes harmoniques de a par rapport aux groupes Bbb_1, B$b'b'_1$, ..., et par rapport aux groupes Ccc_1, C$c'c'_1$, ..., et soient β, β', β'', ..., γ, γ', γ'', ... les deux séries de points ainsi obtenus : ces deux séries sont homographiques.

Mais, si l'on considère celle des courbes qui passe en a, le centre des moyennes harmoniques correspondant sur chaque transversale est le point a lui-même; donc les droites $\beta\gamma$, $\beta'\gamma'$, $\beta''\gamma''$, ... qui joignent les points correspondants des deux divisions se coupent en un même point. C'est le point P, intersection des axes des moyennes harmoniques de a relatif aux deux cubiques considérées. P est donc le centre des moyennes harmoniques de a sur la droite aP par rapport à toutes les cubiques, ou, en d'autres termes, a est un point commun à toutes les polaires de P, ce qu'il fallait prouver. Les polaires de P formant un système de coniques circonscrites à un quadrilatère, les axes des moyennes harmoniques de ce point forment un faisceau de droites convergentes.

Il résulte de ce qui précède que les cubiques d'un faisceau déterminent sur toute transversale une division par groupes de trois points telle, que les conjugués d'un point quelconque de la droite par rapport à tous les groupes forment un système en involution. Cette propriété peut servir de définition à ce mode de division par groupes de trois points, sans faire intervenir les faisceaux de courbes du troisième ordre, absolument comme l'involution ordinaire se définit indépendamment des faisceaux de coniques.

Lorsqu'on connaît deux groupes (a, a', a''), (b, b', b''), toute la division est déterminée, et l'on peut construire les points c', c'', qui doivent compléter un groupe quelconque dont on donne le premier point c. Prenons les conjugués (α, α'), (β, β') de c par rapport à (a, a', a''), (b, b', b''); comme c coïncide avec un de ses conjugués relatifs à (c, c', c''), il suffit de chercher le sixième point γ de l'involution déterminée par $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ et c pour avoir le second conjugué, et ce point γ sera le conjugué harmonique de c par rapport à $c'c''$. Qu'on prenne ensuite un point quelconque P sur la droite et ses conjugués $\alpha_p\alpha'_p$, $\beta_p\beta'_p$ relatifs aux groupes (a, a', a''), (b, b', b''); on cherchera ses conjugués relatifs à deux groupes (c, d', d''), (c, e', e''), choisis de telle sorte que $d'd''$, $e'e''$ divisent harmoniquement $c\gamma$. Soient $\delta\delta'$, $\varepsilon\varepsilon'$ ces deux couples de conjugués. On cherchera le segment xy appartenant à la fois à l'involution $\alpha_p\alpha'_p$, $\beta_p\beta'_p$ et à l'involution $\delta\delta'$, $\varepsilon\varepsilon'$; x, y seront les conjugués de P relativement à (c, c', c''). Dès lors on trouvera facilement $c'c''$; car la série de segments $d'd''$, $e'e''$,... en involution est homographique à la série $\delta\delta'$, $\varepsilon\varepsilon'$,.... On prendra trois segments $d'd''$, $e'e''$, $f'f''$ de la première involution, et l'on déterminera $c'c''$ par la condition

$$\text{rapport anharmonique}(d'd'', e'e'', f'f'', c'c'') = (\delta\delta', \varepsilon\varepsilon', \varphi\varphi', xy).$$

Les divisions par groupes de trois points que je viens de considérer admettent quatre points doubles, c'est-à-dire qu'il existe quatre groupes tels, que deux de leurs points soient confondus en un seul. Soient, en effet, $aa'a''$, $bb'b''$ deux groupes donnés; $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ les conjugués d'un point P de la droite par rapport à chacun d'eux; $\alpha_1\alpha'_1$, $\beta_1\beta'_1$ ceux d'un point P_1. Tout point double est tel qu'il se confond avec un des conjugués d'un point quelconque par rapport au groupe auquel il appartient. Il suffira donc de chercher les segments des deux involutions $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$,..., $\alpha_1\alpha'_1$, $\beta_1\beta'_1$,... qui ont une extrémité commune.

Ces deux séries se correspondent anharmoniquement; la solution du problème exige seulement la connaissance de trois segments homologues de chaque série, et elle se ramène ensuite à l'intersection de deux coniques (*voir* le Mémoire de M. Chasles *sur la construction des racines des équations du troisième et du quatrième degré*). Il y a donc quatre points doubles, comme je l'avais annoncé.

On conclut de là que, parmi les cubiques d'un faisceau, il y en a quatre qui touchent une droite donnée; il faut, pour les construire, chercher les points doubles de la division par groupes de trois points que le faisceau détermine sur la droite.