Nouvelles annales de mathématiques

Laguerre

Mémoire sur l'emploi des imaginaires dans la géométrie de l'espace

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 11 (1872), p. 108-117

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__108_0>

MÉMOIRE SUR L'EMPLOI DES IMAGINAIRES DANS LA GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE

(suite, voir même tome, p. 14);

PAR M. LAGUERRE.

7. La façon dont j'ai défini au n° 5 les surfaces anallagmatiques, au moyen de leurs sections circulaires, s'étend d'elle-même au cas où ces surfaces ont un plan de symétrie; dans ce cas, l'une des sphères principales se réduit à un plan, ainsi que la surface du second degré correspondante, et les définitions que j'ai données précédemment, la définition comme enveloppes de sphères et la définition par points, deviennent illusoires. Mais, avant d'aborder ce sujet, il est nécessaire d'exposer quelques considérations très-simples sur la transformation des figures par rayons vecteurs réciproques.

Étant donnés un point quelconque a, réel ou imaginaire, et le cône isotrope ayant ce point pour sommet, il est clair que, par une transformation quelconque par rayons vecteurs réciproques, ce cône isotrope se transforme en un autre cône isotrope ayant pour sommet le point qui correspond au point a. Si donc on a deux points quelconques a et b, au cercle (a, b) correspondra après la transformation le cercle (α, β), α et β désignant les points qui correspondent aux points a et b.

Imaginons une surface anallagmatique comme le lieu des différents cercles (a, a'), (b, b'), (c, c'),... déterminés par les points où les génératrices d'une surface du second ordre aa', bb', cc',... s'appuient sur un biquadratique sphérique F, et effectuons sur cette figure une transformation par rayons vecteurs réciproques. La courbe F se transformera en une autre biquadratique sphérique Φ; sur cette courbe Φ, aux points a, a', b, b',... correspondront des points α, α', β, β',..., et la surface transformée de la surface donnée sera le lieu des cercles (α, α'), (β, β'),.... D'où l'on peut, en passant, tirer cette conséquence, que les droites $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$,... sont, comme les droites aa', bb', cc',..., les génératrices d'une même surface du second ordre.

Considérons maintenant une biquadratique sphérique F et une surface du second degré quelconque A, passant par cette courbe. Toutes les génératrices d'un même système de A, telles que aa', peuvent être obtenues en choisissant arbitrairement une génératrice ss' de l'autre système et en menant des plans par cette dernière génératrice. Ces divers plans couperont la sphère suivant des cercles passant par les deux points fixes s et s' et chacun de ces cercles coupera la courbe F en deux points variables a et a' situés sur une même génératrice de A; le lieu des cercles (a, a') est l'anallagmatique définie par la surface A et la focale F; on peut donc énoncer la proposition suivante :

Si, par deux points fixes s et s', d'une biquadratique sphérique F, on mène un cercle variable rencontrant la courbe F aux deux points a et a', le lieu des cercles (a, a') est une surface anallagmatique ayant F pour focale.

Transformons maintenant la figure précédente en prenant le pôle de transformation sur la sphère qui contient la courbe F; la surface anallagmatique donnée se transforme en une surface anallagmatique ayant pour plan de symétrie le plan qui correspond à la sphère. La focale F se transforme en une anallagmatique plane Φ sur laquelle se trouvent les deux points σ et σ' correspondant aux points s et s'; et l'on obtient la proposition suivante :

Si, par deux points fixes σ et σ' d'une anallagmatique plane Φ, on mène un cercle variable coupant la courbe Φ aux points α et α', le lieu des cercles (α, α') est une surface anallagmatique ayant pour plan de symétrie le plan de la focale Φ.

Le second système de sections circulaires appartenant à la focale Φ s'obtiendrait facilement : en effet, étant mené par σ et par σ' un cercle quelconque coupant la focale en deux points α et α'; si, par ces deux points, on mène un cercle variable rencontrant Φ aux points ρ et ρ', les différents cercles tels que (ρ, ρ') constitueront ce second système de sections circulaires.

Les plans des différents cercles tels que (α, α') ont pour traces, sur le plan de la focale Φ, les perpendiculaires élevées sur les segments $\alpha\alpha'$ en leurs points milieux. Toutes ces perpendiculaires, il est facile de le voir, enveloppent une conique ayant pour foyers les foyers singuliers de l'anallagmatique Φ (*). D'où l'on peut conclure que, quand une série de surfaces anallagmatiques a pour focale commune une anallagmatique plane, les traces des cylindres enveloppés par les plans des cercles de ces surfaces appartenant à cette focale, sur le plan de symétrie, sont des coniques homofocales ayant pour foyers communs les foyers singuliers de la focale.

8. La proposition précédente n'est, du reste, qu'un cas particulier d'un théorème relatif aux anallagmatiques en général et que l'on peut établir très-simplement.

Considérons une surface anallagmatique quelconque R, ayant pour focale une biquadratique sphérique F. Les

---

(*) Voir, dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (janvier 1863), ma Note intitulée : *Théorèmes généraux sur les courbes*, etc.

plans des divers cercles de la surface, appartenant à cette focale, enveloppent un cône ayant pour sommet le centre de la sphère S, sur laquelle est située la focale ; et ces plans sont perpendiculaires aux diverses génératrices de la surface du second degré A passant par la focale qui détermine la surface R. Pour trouver les droites focales de ce cône, je rappellerai que ces droites sont les intersections des divers plans isotropes qu'on peut lui mener tangentiellement. Or, les perpendiculaires à un plan isotrope touchant l'*ombilicale* en un point donné ω sont les diverses droites isotropes passant par ce point correspondant aux plans isotropes tangents au cône ; donc des génératrices isotropes de A, et réciproquement. Une génératrice isotrope de A doit percer le plan de l'infini en un point de l'ombilicale, et aussi en un point de la trace de la surface A sur le même plan. Soit Ω l'ombilicale et a, b, c, d les quatre points où cette courbe rencontre la focale F ; la surface A passant par cette focale, sa courbe d'intersection avec le plan de l'infini est une conique passant par les points a, b, c et d, et il est clair que les génératrices isotropes de A sont les huit génératrices passant par ces quatre points. Les traces, sur le plan de l'infini, des quatre plans qui leur sont perpendiculaires et qui passent par le centre de la sphère, sont les quatre droites menées tangentiellement à l'ombilicale par les quatre points a, b, c et d ; les focales du cône sont donc les six droites conjuguées deux à deux qui joignent le centre de la sphère aux divers points d'intersection p, q, r, s, t, u des quatre tangentes. On voit que ces focales sont complétement déterminées par la focale F et ne dépendent en aucune façon de la surface particulière A. On peut donc énoncer cette proposition :

Si l'on considère une série de surfaces anallagmatiques homofocales, et si, pour chacune de ces surfaces, on construit le cône enveloppe des cercles appartenant à l'une de ses focales, tous les cônes ainsi obtenus sont homofocaux.

J'ajouterai que les focales de ces cônes sont les focales singulières des cônes ayant pour base la focale de la surface anallagmatique considérée, et, pour sommet, le centre de la sphère sur laquelle cette courbe est située. Mais, pour abréger, je laisse de côté la démonstration de ce point de détail (*).

9. Je reviens maintenant au mode de description des surfaces anallagmatiques à plan de symétrie, donné au n° 7, pour montrer comment il s'applique aux surfaces du second ordre. Ces dernières s'obtiennent lorsque la focale, qui, en général, est une courbe anallagmatique plane, se réduit à une conique. Soit donc une conique quelconque C réelle (ou du moins ayant une équation réelle) et a, a' deux points fixes pris sur cette conique. Par ces deux points, menons un cercle quelconque coupant la conique en α et en α'; d'après ce qui a été dit ci-dessus, le lieu des cercles tels que (α, α') est une surface du second ordre ayant pour focale C. D'après un théorème élémentaire bien connu, toutes les droites telles que $\alpha\alpha'$ ont une direction fixe. On peut donc énoncer la proposition suivante qu'il serait très-simple, d'ailleurs, d'établir directement :

Si l'on mène, dans le plan d'une conique, une série de droites parallèles à une direction fixe D, *en désignant par* a *et* a' *les deux points d'intersection de la conique avec une quelconque de ces droites, le lieu des cercles*

(*) *Voir*, dans le *Bulletin de la Société Philomathique*, le n° 4 de ma Communication du 23 mars 1867 : *Sur les courbes résultant de l'intersection d'une sphère et d'une surface du second degré.*

tels que (a, a') est une surface du second ordre ayant pour focale la conique donnée.

Supposons que C soit une ellipse; imaginons toutes les droites réelles parallèles à une droite fixe D et extérieures à l'ellipse; chacune de ces droites rencontre l'ellipse en deux points imaginairement conjugués, représentés par un cercle réel; tous les cercles réels ainsi obtenus, quand la droite se déplace, constituent l'un des systèmes de sections circulaires d'un hyperboloïde à deux nappes ayant pour focale l'ellipse donnée. Si le système des droites considéré était parallèle à une droite D' faisant avec le grand axe de l'ellipse un angle supplémentaire de l'angle que fait D avec ce même axe, les cercles représentatifs des points d'intersection de l'ellipse avec ces diverses droites constitueraient le second système de sections circulaires de l'hyperboloïde mentionné ci-dessus.

Si nous imaginons l'infinité d'hyperboloïdes à deux nappes qui ont pour focale l'ellipse C, leurs diverses sections circulaires représenteront tous les points imaginaires situés sur cette ellipse. D'où l'on peut conclure le théorème suivant :

Pour qu'un cercle réel, donné dans l'espace, représente un couple de points imaginairement conjugués, situés sur une ellipse donnée, il faut et il suffit que ce cercle soit une section circulaire d'un hyperboloïde à deux nappes ayant cette ellipse pour focale.

De même :

Pour qu'un cercle réel, donné dans l'espace, représente un couple de points imaginairement conjugués, situés sur une hyperbole donnée, il faut et il suffit que ce cercle soit une section circulaire d'un ellipsoïde ayant cette hyperbole pour focale.

10. Il existe, relativement au système de deux cercles situés sur une même sphère une propriété très-simple, qui a de fréquentes applications dans la géométrie de la sphère et dans la théorie des surfaces anallagmatiques. Je vais l'exposer brièvement, en en supprimant la démonstration, d'ailleurs très-facile à suppléer.

Soient deux cercles C et D situés sur une même sphère, et par conséquent se coupant en deux points. Le cercle C représente deux points de l'espace c et c', qui sont réciproques par rapport à la sphère et que l'on pourrait désigner par la notation (C); le cercle D représente de même deux points réciproques d et d'. Les quatre points c, c', d et d' sont d'ailleurs dans un même plan passant par le centre de la sphère. Cela posé, par les deux cercles donnés, on peut faire passer deux cônes, et les sommets de ces cônes sont les deux points de rencontre respectifs des droites cd et $c'd'$ et des droites cd' et $c'd$.

Supposons les cercles C et D réels; supposons-les, en outre, décrits dans un sens déterminé, en sorte que chacun d'eux représente un point imaginaire et un seul; le point c, par exemple, étant représenté par le cercle C et le point d par le cercle D. La droite imaginaire cd est imaginairement conjuguée à la droite $c'd'$; ces deux droites étant dans le même plan se coupent en un point réel, que l'on peut définir comme étant le point réel situé sur cd; et, d'après ce que j'ai dit plus haut, ce point est le sommet d'un cône passant par C et D. Mais ici l'on peut ajouter qu'un spectateur, dont l'œil serait placé au sommet du cône, verrait les cercles C et D décrits en sens inverse; en sorte que si le mobile qui est censé décrire l'un d'eux lui paraît se mouvoir dans le sens des aiguilles d'une montre, le mobile qui est supposé décrire l'autre lui paraîtra se mouvoir dans l'autre sens.

Cette dernière remarque est souvent utile pour fixer le sens que l'on doit affecter à un cercle représentant un point imaginaire.

Considérons maintenant une surface anallagmatique R, définie par la surface du second degré A et la focale F située sur cette surface, et les deux systèmes de génératrices circulaires de l'anallagmatique appartenant à cette focale. Soit C un cercle fixe de l'un de ces systèmes, représentant deux points c et c' de la focale; soit D un cercle quelconque de l'autre système, représentant deux points d et d' de la focale. Les cercles C et D sont situés sur une même sphère, et l'on sait d'ailleurs que les droites cc' et dd' sont deux génératrices, de systèmes différents, de la surface A. D'après ce qui a été dit plus haut, les sommets des cônes qui passent par les cercles C et D sont les deux points r et s, où se coupent respectivement les droites cd' et $c'd$ d'une part, les droites cd et $c'd'$ d'autre part. Le lieu décrit par les sommets de ces cônes, lorsque, le cercle C étant fixe, le cercle D se déplace sur la surface R, est donc l'intersection des deux cônes ayant pour base la focale F et pour sommets les points c et c'. Ces cônes sont du troisième degré; leur intersection, qui est du neuvième degré, se compose d'abord de la génératrice cc', de la focale et du lieu cherché; ce dernier est donc du quatrième ordre.

D'où l'on peut conclure la proposition suivante :

Étant pris, sur une surface anallagmatique, un cercle quelconque appartenant à une focale F *de cette surface, par ce cercle et par un cercle quelconque* D *du second système circulaire appartenant à cette focale, on peut faire passer deux cônes; le lieu décrit par le sommet de ces cônes, lorsque, le cercle* C *étant fixe, le cercle* D *se déplace sur la surface, est une courbe du quatrième ordre faisant partie de l'intersection des deux cônes, qui ont pour base commune la focale* F *et* *pour sommets les deux points de cette focale que représente le cercle* C.

11. Dans ce qui précède, j'ai montré comment on peut déterminer les conditions géométriques auxquelles un cercle doit satisfaire pour représenter un couple de points situés sur une biquadratique sphérique donnée, en groupant deux à deux les divers points de cette courbe de façon qu'à l'ensemble de tous les couples de points corresponde l'ensemble des génératrices circulaires d'une surface anallagmatique. Chaque mode de groupement est défini par une surface du second ordre, de telle sorte que deux points quelconques de la courbe, qui se correspondent, se trouvent sur une même génératrice de la surface.

Soit, en général, une courbe gauche géométrique quelconque G; imaginons une surface réglée V, telle que chacune de ses génératrices s'appuie en deux points sur cette courbe. Soient aa', bb', cc',... les génératrices consécutives de cette surface; les cercles (a, a'), (b, b'), (c, c'),... engendreront une autre surface, que je dirai dérivée de la courbe G. D'une même courbe donnée, on peut ainsi déduire une infinité de surfaces à génératrices circulaires, et chacune de ces surfaces dérivées correspond à un certain mode de groupement des points de la courbe, défini par la surface réglée V.

Lorsque la courbe G est plane, les droites, telles que aa', bb',..., qui joignent les points conjugués de cette courbe, ne forment plus une surface gauche, mais enveloppent une courbe plane, qui peut aussi servir à définir le groupement des points. Dans ce cas, et lorsque la courbe G est d'un degré supérieur à deux, chacune des tangentes à l'enveloppe plane rencontrant G en plus de deux points, il est nécessaire de fixer ceux des points de rencontre que l'on doit grouper ensemble. Pour éviter cette difficulté, il est alors généralement préférable de définir chaque couple de points par d'autres considérations ne donnant lieu à aucune ambiguïté, comme je l'ai fait au n° 7, en traitant des surfaces anallagmatiques à plan de symétrie.

On peut toujours, d'ailleurs, sauf dans le cas très-particulier où la courbe plane G est un cercle, effectuer une transformation par rayons vecteurs réciproques, de façon que cette courbe devienne une courbe gauche sphérique (*).

12. D'une courbe gauche donnée, on peut, comme je l'ai montré, déduire une infinité de surfaces à génératrices circulaires, dérivées de cette courbe.

Réciproquement, étant donnée une surface quelconque à génératrices circulaires, on peut toujours la considérer comme une surface dérivée d'une certaine courbe gauche G. En désignant par C, C′, C″,... les diverses génératrices circulaires de la surface, cette courbe est le lieu des points (C), (C′), (C″),...; et la surface réglée V, qui détermine le mode de groupement des points de la courbe, est le lieu des axes des différents cercles.

(*La suite prochainement.*)

(*) *Voir*, comme application de ces considérations, mon *Étude géométrique sur la cyclide*. Journal *l'Institut* et *Bulletin de la Société Philomathique*, novembre 1871.