Nouvelles annales de mathématiques

Ludvig Oppermann

Sur la formule d'interpollation de Newton

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 10 (1871), p. 82-87

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__82_1>

SUR LA FORMULE D'INTERPOLLATION DE NEWTON;

PAR M. LUDVIG OPPERMANN.

Newton, dans un lemme célèbre (*Princ. Nat. Math.*, lib. III, lemma V), a proposé et résolu le problème fondamental de l'interpolation par les différences finies, et par là, pour ne rien dire de trop, il a posé le fondement de la théorie des différences.

Dans le *Methodus differentialis*, imprimé en 1715, il traite le même sujet plus au long; mais, après un minutieux examen, je crois que ce petit traité a été écrit bien des années avant le lemme en question, qui porte toute l'apparence d'être le fruit mûri de ses recherches sur cette matière. A un autre point de vue, le *Methodus differentialis* a un grand intérêt par lui-même, car il montre comment il a traité de tels problèmes en commençant d'une manière toute directe et tout élémentaire; puis, après avoir surmonté les premières difficultés, il avance si rapidement et à si grands pas, qu'une attention médiocre ne suffit pas pour le suivre.

La solution du problème est certainement aussi générale, aussi élégante et aussi simple qu'on devait l'attendre du « *summus* (*) » Newton; mais, hélas! il ne l'a pas prouvée. C'est du moins ce que nous disent ses commentateurs, et parmi eux se trouvent des hommes d'un grand savoir et d'un génie élevé; Stirling lui-même exprime l'opinion que Newton n'a pas choisi la meilleure manière de traiter le problème. Néanmoins je suis porté non-seulement à croire que le procédé de Newton est le plus facile et le meilleur, mais même à supposer qu'il a regardé sa solution comme presque évidente par elle-même; du moins la démonstration, quand on l'entreprend d'une manière juste, est bien facile, comme nous l'allons voir.

Au lieu de donner une copie du texte latin, ou une traduction littérale du lemme en question, j'ai préféré en donner une sorte de paraphrase. Voici les seules modifications que j'ai faites :

(*) C'est par cette *epitheton ornans* que Gauss a distingué Newton, et qu'il n'a, que je sache, donnée à aucun autre.

1° J'ai omis le premier cas (argument équidistant) comme étant seulement spécial; 2° au lieu du langage et de la notation géométriques de Newton, j'ai employé les expressions analytiques aujourd'hui communément usitées, et une notation dans laquelle les arguments sont marqués par de petites lettres, les valeurs correspondantes des fonctions par des capitales, et les « différences divisées » par un δ avec des accents indiquant leur ordre, et suivi par des lettres (entre parenthèses) indiquant les arguments dont dépend la différence. J'espère qu'on trouvera ces modifications peu importantes quant au sens, et de quelque aide pour le lecteur. Voici donc la paraphrase :

Lemme V. — D'une fonction inconnue, nous connaissons $n+1$ valeurs, A, B, C, D, E,... correspondantes aux arguments a, b, c, d, e,...; supposons qu'on exige de représenter ces valeurs par une fonction algébrique entière et rationnelle, de façon que nous puissions, pour chaque argument, calculer directement la valeur correspondante X de la fonction algébrique en question.

Solution. — Formez le système complet des différences divisées de la manière suivante :

$$
\begin{array}{llllll}
a & \mathrm{A} & & & & \\
 & & \delta'(a,b) & & & \\
b & & & \delta''(a,b,c) & & \\
 & & \delta'(b,c) & & \delta'''(a,b,c,d) & \\
c & \mathrm{C} & & \delta''(b,c,d) & & \delta^{\mathrm{IV}}(a,b,c,d,e). \\
 & & \delta'(c,d) & & \delta'''(b,c,d,e) & \\
d & \mathrm{D} & & \delta''(c,d,e) & & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
 & & \delta'(d,e) & & \ldots\ldots\ldots\ldots & \\
e & \mathrm{E} & & \ldots\ldots\ldots & & \\
 & & \ldots\ldots & & & \\
. & . & & & &
\end{array}
$$

On trouve les différences divisées, les premières en divisant la différence de deux valeurs subséquentes de la fonction par la différence des arguments correspondants

$$\delta'(a,b) = \frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{a-b}, \quad \delta'(b,c) = \frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{b-c}, \ldots$$

On trouve les différences divisées d'un ordre plus élevé quelconque en divisant la différence de deux différences subséquentes par la différence des deux arguments, qui ne sont pas communs aux deux différences en question ; ainsi

$$\delta''(a, b, c) = \frac{\delta'(a, b) - \delta'(b, c)}{a - c},$$

$$\delta''(b, c, d) = \frac{\delta'(b, c) - \delta'(c, d)}{b - d},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\delta'''(a, b, c, d) = \frac{\delta''(a, b, c) - \delta''(b, c, d)}{a - d},$$

$$\delta'''(b, c, d, e) = \frac{\delta''(b, c, d) - \delta''(c, d, e)}{b - e},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

D'après cela, nous aurons

$$\begin{aligned} X = A &+ (x - a)\delta'(a, b) + (x - a)(x - b)\delta''(a, b, c) \\ &+ (x - a)(x - b)(x - c)\delta'''(a, b, c, d) \\ &+ (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)\delta^{\text{IV}}(a, b, c, d, e) + \dots . \end{aligned}$$

Avant de donner la démonstration, je pense utile (quoique peut-être il n'y ait pas de nécessité) d'appeler l'attention des lecteurs les plus jeunes vers les points suivants :

1° La manière dont nous effectuons la soustraction n'a aucune importance, en supposant seulement que la manière soit la même pour le dividende et le diviseur

$$\frac{A - B}{a - b} = \frac{B - A}{b - a}.$$

2° Si par F on représente une fonction algébrique entière et finie d'un ou de plusieurs arguments, non-seulement $F(p) - F(q)$ est divisible par $(p - q)$ et le quotient est d'un degré moins élevé que celui de F ; mais $F(p, r, s, t) - F(q, r, s, t)$ est aussi bien divisible par $(p - q)$ et le quotient d'un degré moins élevé que celui de F, ce qui est facilement démontré quand nous posons

$$F(p, r, s, t, \ldots) = k_0 + k_1 p + k_2 p^2 + k_3 p^3 + \ldots$$

et

$$F(q, r, s, t, \ldots) = k_0 + k_1 q + k_2 q^2 + k_3 q^3 + \ldots,$$

ce qui est toujours permis (k_0, k_1, k_2, k_3,... signifient des fonctions de r, s, t,...).

3° On comprend alors que, comme A, B, C,... sont des fontions du $n^{ième}$ degré, les premières différences divisées sont du $(n - 1)^{ième}$ degré, les secondes différences divisées du $(n - 2)^{ième}$ degré, etc., jusqu'aux $n^{ièmes}$ différences divisées, qui sont du $(n - n)^{ième}$ degré, c'est-à-dire constantes, indépendantes des arguments. Il est évident que toutes les différences d'un degré encore plus élevé doivent disparaître.

Pour démontrer que la valeur assignée plus haut à X est correcte, il nous faut seulement écrire x, X et les diverses différences divisées au sommet du schéma donné ci-dessus; alors nous aurons

$$\delta'(x, a) = \frac{X - A}{x - a}, \quad \delta''(x, a, b) = \frac{\delta'(x, a) - \delta'(a, b)}{x - b},$$

$$\delta'''(x, a, b, c) = \frac{\delta''(x, a, b) - \delta''(a, b, c)}{x - c}, \ldots.$$

On a donc

$$X = A + (x - a)\delta'(x, a),$$

$$\delta'(x, a) = \delta'(a, b) + (x - b)\delta''(x, a, b),$$

$$\delta''(x, a, b) = \delta''(a, b, c) + (x - c)\delta'''(x, a, b, c), \ldots,$$

jusqu'à

$$\delta^{(n)}(x, a, b, c, \ldots) = \delta^{(n)}(a, b, c, d, \ldots),$$

et par substitution

$$\begin{aligned} X = A &+ (x-a)\delta'(a, b) + (x-a)(x-b)\delta''(a, b, c) \\ &+ (x-a)(x-b)(x-c)\delta'''(a, b, c, d) \\ &+ (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\delta^{\text{IV}}(a, b, c, d, e) + \ldots . \end{aligned}$$