

R. L. ELLIS

**Démonstration de deux théorèmes relatifs
à une surface du second degré**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 10
(1871), p. 76-79

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__76_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1871, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**DÉMONSTRATION DE DEUX THÉORÈMES RELATIFS
A UNE SURFACE DU SECOND DEGRE ;**

PAR FEU R. L. ELLIS.

(Traduit de l'anglais de *The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics.*)

M. Chasles a donné, dans son *Aperçu*, deux théorèmes correspondant dans les trois dimensions respectivement à ceux de Pascal et de Brianchon; les démonstrations suivantes déduisent ces théorèmes de M. Chasles des deux autres.

THÉORÈME I. — *Si les six arêtes d'un tétraèdre sont coupées chacune en deux points par une surface du second ordre, et que les douze points ainsi obtenus soient groupés trois à trois sur quatre plans opposés chacun à un sommet du tétraèdre, chaque plan coupe la face opposée du tétraèdre. Les quatre intersections*

sont des génératrices d'un hyperboloïde à une nappe, et font partie du même système.

Démonstration.— Soient a, b, c, d les quatre sommets du tétraèdre; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les faces opposées du tétraèdre; $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ les quatre plans mentionnés dans l'énoncé, α' étant opposé à α . Nous appellerons les lignes $\alpha\alpha'$ les *lignes de Chasles*; considérons le plan α . Par son intersection avec les plans $\beta, \gamma, \delta, \beta', \gamma', \delta'$, il forme un hexagone auquel on peut appliquer le théorème de Pascal. Les traces de β, β', \dots sont donc sur une droite que l'on peut appeler la *droite de Pascal*. L'un de ces points est sur l'intersection des plans β, β' ; l'autre sur l'intersection des plans γ, γ' ; le troisième sur celle des plans δ, δ' . Par conséquent, cette ligne de Pascal coupe trois des lignes de Chasles. Elle coupe aussi la quatrième, puisque ces droites sont dans le même plan α . Il y a une ligne de Pascal sur chacune des faces du tétraèdre, et l'on a ainsi deux systèmes de quatre lignes, chacune de celles d'un système coupant toutes celles de l'autre.

Mais lorsqu'une ligne rencontre toujours trois droites, elle engendre un hyperboloïde à une nappe, et il est évident que les quatre lignes de Chasles sont des génératrices d'un même système.

Corollaire. — Les quatre lignes de Pascal sont des génératrices de la même surface et de l'autre système.

THÉORÈME II. — *Sur chaque face d'un tétraèdre comme base, on élève une pyramide triangulaire, et l'on joint le sommet de chaque pyramide au sommet opposé du tétraèdre. Si les douze faces des quatre pyramides sont tangentes à une même surface du second degré, les quatre lignes que nous avons menées sont des génératrices du même système d'un hyperboloïde à une nappe.*

Démonstration. — Considérons les six plans tangents qui passent par un même sommet du tétraèdre. Alors leurs six points de contact sont situés sur un même plan, que je trace. Son intersection avec les six plans donne un hexagone circonscrit à la conique. Par suite, les trois diagonales passent par un même point, qui est commun aux trois plans passant par le sommet que nous avons considéré, par un autre sommet du tétraèdre et le sommet de la pyramide opposée à ce dernier; et, comme ces plans ont deux points communs, ils ont une intersection commune qui, comme il est facile de le voir, rencontre les quatre lignes du théorème. Il est clair qu'il y a quatre lignes semblables, et, par conséquent, comme dans le premier théorème, on a deux séries de quatre lignes, chaque ligne d'une série coupant toutes les lignes de l'autre; donc les quatre lignes du théorème sont bien des génératrices du même système.

Corollaire. — Les quatre lignes menées d'un sommet du tétraèdre au point de Brianchon correspondant sont des génératrices de l'autre système.

Scolie. — Ces deux corollaires semblent sortir de la question, comme n'étant pas mentionnés par M. Chasles dans la démonstration qu'il a donnée de ces deux théorèmes. J'ajouterai une autre remarque qui saute aux yeux : c'est que, dans le premier théorème, l'hyperboloïde touche les quatre faces du tétraèdre. Le point de contact dans la face α est le point de rencontre des lignes de Pascal et de Chasles. Appelons ce point A'' . On a alors le théorème suivant : AA'', BB'', \dots sont des génératrices du même système d'un autre hyperboloïde. La démonstration de ce théorème est si simple que je ne la donne pas ici.

Le théorème correspondant par rapport au second théorème de M. Chasles est le suivant : A, B, C, D étant

les sommets du tétraèdre, A', B', C', D' les sommets des pyramides correspondantes, A'', B'', C'', D'' les points correspondants de Brianchon, si A'A coupe le plan α en A''', et AA'' en A''', les quatre lignes A'''A'' sont des génératrices du même système d'un hyperboloïde. Le principe de ces deux théorèmes est le même.

L'hyperboloïde du premier théorème de M. Chasles étant une surface du second ordre, on peut l'appliquer au cas du second théorème, c'est-à-dire que le point A' est sur le plan α , etc. De même, à l'hyperboloïde du second système peut être appliqué un cas particulier du premier. Il est évident que l'on pourrait ne pas s'arrêter ici ; mais de l'idée primitive d'un tétraèdre dont les six arêtes sont coupées par une surface du second ordre, on peut déduire une infinité de systèmes de quatre lignes, qui sont les génératrices d'un hyperboloïde à une nappe.
