

DÉSIRÉ ANDRÉ

Sur le développement du binôme

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 10
(1871), p. 74-76

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__74_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1871, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LE DEVELOPPEMENT DU BINOME ;

PAR M. DÉSIRE ANDRÉ.

I.

THÉORÈME. — *La somme des p premiers coefficients de $(a - b)^m$ est égale au $p^{\text{ième}}$ coefficient de $(a - b)^{m-1}$.*

Supposons ce théorème vrai pour la somme des $p - 1$ premiers coefficients de $(a - b)^m$; en désignant par C_m^n le nombre des combinaisons simples de m objets n à n et convenant de regarder C_m^0 comme égal à l'unité, nous aurons

$$\sum_{n=0}^{n=p-2} (-1)^n C_m^n = (-1)^{p-2} C_{m-1}^{p-2}.$$

Ajoutons aux deux membres de cette égalité le $p^{\text{ième}}$ coefficient de $(a - b)^m$; nous trouvons

$$(-1)^{p-1} C_m^{p-1} + \sum_{n=0}^{n=p-2} (-1)^n C_m^n = (-1)^{p-2} C_{m-1}^{p-2} + (-1)^{p-1} C_m^{p-1},$$

ou bien

$$\sum_{n=0}^{n=p-1} (-1)^n C_m^n = (-1)^{p-1} (-C_{m-1}^{p-2} + C_m^{p-1});$$

or

$$-C_{m-1}^{p-2} + C_m^{p-1} = C_{m-1}^{p-1};$$

donc

$$\sum_{n=0}^{n=p-1} (-1)^n C_m^n = (-1)^{p-1} C_{m-1}^{p-1}.$$

On voit ainsi que, si le théorème est vrai pour la somme des $p - 1$ premiers coefficients de $(a - b)^m$, il l'est encore pour la somme des p premiers coefficients. Nous achèverons donc la démonstration si nous faisons remarquer que ce théorème est vrai, évidemment, pour le premier coefficient, ainsi que pour la somme des deux premiers.

Remarque. — La démonstration précédente ne s'étend pas au cas où l'on prendrait tous les coefficients de $(a - b)^m$; mais, alors encore, on peut dire que le théorème subsiste. Dans ce cas, en effet, on prend la somme des $m + 1$ premiers coefficients de $(a - b)^m$, somme qui est zéro; et le $(m + 1)^{ième}$ coefficient de $(a - b)^{m-1}$, lequel n'existe pas, peut être regardé comme égal à zéro.

II.

THÉORÈME. — *Si m est un nombre premier, la somme $(-1)^p C_{m-1}^p - 1$ est, quel que soit p , divisible par m .*

D'après le théorème précédent, nous avons, en effet,

$$(-1)^p C_{m-1}^p - 1 = -C_m^1 + C_m^2 - C_m^3 + \dots + (-1)^p C_m^p.$$

Or, p ne dépassant pas $m - 1$, tous les termes du second membre sont divisibles par m , si m est premier. Le premier membre, dans ce cas, est donc aussi divisible par m .

C. Q. F. D.

Remarque. — On peut évidemment, dans l'énoncé de ce dernier théorème, remplacer $(-1)^p C_{m-1}^p - 1$ par $C_{m-1}^p - (-1)^p$.

III.

THÉORÈME. — *m étant un nombre premier, si l'on écrit les coefficients de $(a + b)^{m-1}$, que l'on ajoute $+1$ à ceux de rang pair et -1 à ceux de rang impair, on obtient des nombres qui sont tous divisibles par m .*

Les nombres ainsi obtenus ne sont, en effet, autre chose que les valeurs numériques de l'expression $C_{m-1}^p - (-1)^p$, lorsqu'on y remplace p par les nombres $0, 1, 2, \dots, (m-1)$.

Exemple. — Le nombre 11 est premier; les coefficients de $(a+b)^{10}$ sont

1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, etc.;

en ajoutant $+1$ aux coefficients de rang pair, -1 à ceux de rang impair, on trouve les nombres

0, 11, 44, 121, 209, 253, 209, etc.,

qui sont tous divisibles par 11.