

Propriétés focales des figures homographiques

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 10
(1871), p. 66-74

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__66_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1871, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

PROPRIÉTÉS FOCALES DES FIGURES HOMOGRAPHIQUES.

(Extrait d'un Rapport présenté à la Société royale de Londres par M. Henry-J. Stephen Smith, professeur à l'Université d'Oxford.)

I. Définition du foyer dans les figures homographiques. — Lorsque deux figures planes (Ω, ω) sont en perspective, S étant le centre de perspective, Ω, ω_1 l'axe de perspective, nous savons qu'il existe dans chacune des

figures une droite qui a sa perspective sur l'autre plan à l'infini ; nous appellerons ces deux lignes les *lignes évanouissantes* des deux figures. Ces lignes partagent les deux plans en deux régions. Je les appellerai (Ω_1) , (Ω_2) et (ω_1) , (ω_2) . Je suppose que (Ω_1) soit la région de Ω où se trouve $\Omega_1\omega_1$; alors cette ligne sera également située dans (ω_1) ; on pourra voir alors que, si P, p sont des points correspondants de (Ω_1) et (ω_1) , les rayons SP, sp sont de même signe, tandis que, si P et p sont des points correspondants de (Ω_2) et de (ω_2) , les rayons SP, sp sont de signes contraires.

Lorsque les directions positive et négative d'une ligne droite dans l'un des plans Ω et ω sont déterminées, il en est de même des directions correspondantes de la ligne perspective, c'est-à-dire que, si un point se meut dans la direction positive d'une droite sur un des plans, son image sur l'autre plan se meut dans la direction positive correspondante de l'autre plan. Si, par suite, P, Q sont deux points de la même région de Ω , et p, q leurs images, qui sont nécessairement dans la région correspondante de ω , la direction de P à Q le long du segment *fini* PQ est de même signe que la direction de p à q le long du segment *fini* pq. Mais si P, Q sont dans des régions opposées de Ω , de sorte que le segment *fini* PQ est rencontré intérieurement par la ligne évanouissante de Ω au point A, la direction $p \infty q$ correspond à la direction PAQ, et les directions des segments *finis* PQ, pq sont de signes contraires. Si A est un point quelconque de la ligne évanouissante de Ω , aux lignes PA et QA devront correspondre des directions semblables ou dissemblables de deux droites parallèles, images de PA et QA, suivant que P et Q sont dans la même région ou dans des régions différentes de Ω .

De plus, si dans le plan Ω on considère une des deux directions de rotation autour d'un point comme positive

(par exemple celle qui, vue du point S , paraît se diriger vers la droite), les signes des directions correspondantes de rotation dans ω seront déterminés. Mais la direction qui paraît se diriger sur la droite sera positive dans (ω_1) et négative dans (ω_2) .

Par le point S passent deux droites perpendiculaires aux plans bissecteurs de l'angle dièdre formé par les plans qui se coupent, Ω et ω . Supposons que ces lignes coupent le plan Ω en F_1, F_2 , et le plan ω en f_1, f_2 . Supposons que f_2SF_2 soit perpendiculaire au plan qui se trouve dans le même angle dièdre que S . Alors SF_1, Sf_1 sont de même signe, et F_1, f_1 sont respectivement dans les régions (Ω_1) et (ω_1) , tandis que SF_2, Sf_2 étant de signes contraires, F_2 et f_2 sont dans les régions (Ω_2) et (ω_2) . La propriété fondamentale de ces points est la suivante :

Les angles qui ont leurs sommets en F_1 ou F_2 , et sont dans le plan Ω , sont projetés sur le plan ω suivant des angles égaux dont les sommets sont f_1 ou f_2 , ou, en précisant davantage :

L'angle formé par des directions données de deux droites de Ω , se coupant en F_1 ou F_2 , est égal à l'angle formé par les directions correspondantes des droites correspondantes de ω , se coupant en f_1 ou f_2 .

Ce sont précisément ces points F_1, F_2, f_1, f_2 que l'auteur appelle les *foyers* de perspective sur les deux plans respectifs Ω, ω . Les directions de rotation, vues du point S , étant les mêmes pour les points F_1 et f_1 , tandis qu'elles sont opposées autour de F_2 et f_2 , les foyers F_1 et f_1 seront appelés *semblables*, tandis que les foyers F_2, f_2 seront *dissemblables*.

II. *Lignes équisegmentaires.* — Tout point de $\Omega_1 \omega_1$ étant à lui-même sa perspective, on peut dire, en ne faisant pas attention à la coïncidence de ces points, que

$\Omega_1 \omega_1$ est un axe *équisegmentaire*, c'est-à-dire qu'à tout segment de $\Omega_1 \omega_1$, considéré comme appartenant au premier plan, correspond un segment égal dans l'autre plan. Mais il y a aussi un second système de lignes *équisegmentaires* qui ne coïncident pas. En effet, menons par le point S un plan parallèle au plan qui contient les deux lignes évanouissantes, ce plan coupe le plan des deux figures suivant des lignes $\omega_2 \gamma$, $\Omega_2 Y$, qui sont des lignes *équisegmentaires*; mais ici ces lignes sont *dissemblables*, la ligne $\Omega_1 \omega_1$ représentant les axes *semblables*.

Lorsque l'on fait tourner l'un des plans, par exemple ω , autour de l'axe de perspective, on sait que les figures restent en perspective, et que le point S décrit un cercle situé dans le plan de symétrie et décrit sur $F_2 F_1$ comme diamètre. Si l'on fait tourner l'un des plans, par exemple ω , autour d'un axe perpendiculaire au plan $\Omega_2 \omega_2$ et mené par S, après une rotation de 180 degrés, les deux figures sont encore en perspective, mais les foyers, qui d'abord étaient *semblables*, deviendront *dissemblables* et *vice versa*. Il en sera de même des axes *équisegmentaires*. On ne peut donc pas distinguer d'une manière absolue les foyers en *semblables* ou *dissemblables*. Nous dirons seulement que, si un foyer est *semblable* à un autre, l'axe le plus voisin est *semblable* à l'axe le plus voisin de l'autre foyer, et inversement.

C'est en partant de ces définitions que l'auteur a établi toute la théorie des propriétés focales des figures *homographiques*, tant planes que dans l'espace. Ces propriétés sont très-curieuses à étudier et pourront certainement ouvrir une nouvelle voie aux investigations. Si nous prenons les titres de quelques chapitres, par exemple, nous trouvons ceux-ci :

11. *Angles changés en angles égaux ou supplémentaires*;

12. *Segments changés en segments égaux ;*

14. *Indicatrice, ou ellipse génératrice, etc.*

De plus, l'auteur nous présente, à la fin de son ouvrage, une note historique relative à la question, note que nous allons reproduire ici.

« L'existence de deux couples d'axes équisegmentaires parallèles dans deux figures homographiques était établie par M. Möbius en 1827 (*Barycentrische Calcul*, p. 320, sect. 230). M. Möbius a montré aussi que, si les points correspondants de deux axes équisegmentaires coïncident sur la ligne d'intersection des deux plans homographiques, ces plans sont en perspective. Magnus (*Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie*; Berlin, 1833; p. 41, sect. 12) a prouvé que, dans deux figures planes homographiques, il existe un couple de points correspondants pour lesquels les faisceaux correspondants sont équiangulaires, et que, si les figures sont placées dans un même plan, avec ces centres de collinéation coïncidant, et que chacune d'elles tourne dans son propre plan autour du centre de collinéation, elle deviendra homologique à l'autre dans deux positions diamétralement opposées. Dans l'une de ces positions, une paire d'axes équisegmentaires coïncideront, tandis que, dans l'autre position, ce sera l'autre paire. Magnus dit expressément que « de deux systèmes placés collinéairement (c'est-à-dire deux figures planes dont les lignes de l'infini ne coïncident pas), chacun a, en général, un seul centre de collinéation. » Comme Magnus suppose tacitement que les figures ne sont pas dans une position quelconque relativement l'une à l'autre, mais sont déjà placées dans le même plan, ce rapport n'est pas erroné; mais ce n'est qu'une partie de la vérité, et l'analyse par laquelle Magnus obtient un centre de collinéation dans chaque figure, en fournira aussi une autre paire, si l'on

change le signe de la constante p dans les équations (1) de la page 42 (*loc. cit.*). Il est tout à fait vrai que, si les deux figures sont une fois placées dans le même plan, il y a seulement un point de chacune qui peut être considéré comme centre de collinéation. Et ce fait, que Magnus a prouvé analytiquement, M. Salmon l'a aussi reconnu géométriquement (*Higher plane Curves*, art. 230, p. 246). Mais il faut se rappeler que deux plans peuvent être placés en coïncidence de deux manières différentes, suivant qu'ils sont placés face à face ou faisant le même lieu, et que, dans l'une de ces positions de coïncidence, l'un des couples de foyers donne les centres de collinéation, tandis que c'est l'autre couple dans la seconde position. Il est utile d'ajouter que, tandis que, comme l'a observé M. Salmon, la position des points circulaires à l'infini n'est pas altérée par un mouvement de translation ou de rotation d'une figure plane dans son propre plan, ces deux points imaginaires sont intervertis, si la figure tourne d'un angle de 180 degrés autour d'un axe situé dans son plan. Et le changement du centre de collinéation, qui arrive lorsque l'une des figures homographiques dont les plans coïncident a ainsi tourné, est une conséquence nécessaire de la permutation des points circulaires imaginaires de la figure tournée.

» Dans le *Traité de Géométrie supérieure*, un seul couple d'axes équisegmentaires et un seul couple de foyers est expressément mentionné; mais l'omission est purement accidentelle, car les méthodes par lesquelles on obtient ces figures fournissent également l'autre couple. Le théorème qui dit que, si deux plans sont en perspective, les foyers sont les points où ils sont percés par des perpendiculaires abaissées du centre de perspective sur les plans bissecteurs des angles des deux plans est une conséquence immédiate d'un principe, d'abord énoncé par

M. Chasles (*Aperçu de l'Histoire des méthodes en Géométrie*, Note IV) et plus tard employé par M. Mulcahy (*Principles of modern Geometry*, cap. VIII, art. 115). »

Après la communication de cette Note à la Société mathématique de Londres, mais (il n'est pas nécessaire de le dire) tout à fait en dehors de cette Note, trois Mémoires ont paru, en partie relatifs au même sujet : I. Dans le numéro de mai 1869 des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, M. Abel Transon obtient le théorème des deux couples de foyers par l'application d'une méthode analytique très-générale ; il décrit exactement la similitude et la dissimilitude des foyers et parle du théorème lui-même comme de « une propriété de l'homographie qui n'avait peut-être pas encore été remarquée ». — II. M. Richelot, de Königsberg, dans une Note datée du 29 octobre 1868, et publiée dans la seconde partie du 70^e volume du *Journal de Crelle*, a considéré la théorie analytique des figures homographiques dans l'espace et a été conduit à la considération de leurs propriétés focales. Il semblerait cependant que M. Richelot suppose que les tangentes aux coniques focales sont les seuls axes des faisceaux équiangulaires de plans, tandis que, comme nous l'avons montré, cette propriété existe pour toute génératrice d'un hyperboloïde confocal. La cause de la méprise (si c'en est une) se trouve dans les expressions : « *Es muss, in der That, eine Axe im obigen Sinne* (c'est-à-dire, si nous comprenons bien M. Richelot, une ligne qui est l'axe d'un faisceau de plans équiangulaires avec le faisceau correspondant) *die Eigenschaft besitzen, dass unter den unendlich vielen auf ihr senkrechten Ebenen eine existirt, deren entsprechende Ebene auf der der Axe entsprechenden Geraden senkrecht steht* (p. 141). Cette propriété n'est cependant pas possédée par tout axe d'un faisceau de plans équiangulaire avec le faisceau

correspondant, mais seulement par ceux qui sont dans l'un des plans principaux. M. Richelot parle d'un travail prêt à paraître d'un de ses élèves, M. Mägis, comme devant contenir une théorie complète de l'homographie dans l'espace. — III. Dans le numéro de novembre 1869 des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, M. Housel énonce ce théorème : *En déplaçant sans déformation deux figurés homographiques dans l'espace, on peut les rendre homologues*. Ce théorème n'est pas d'accord avec l'art. 50 de la présente Note, puisque dans cet article on a démontré que les plans équisegmentaires correspondants ne sont pas superposables, excepté dans le cas de l'homographie sphéroïdale. Mais l'analyse de M. Housel semble insuffisante pour établir cette conclusion, puisqu'il n'est pas démontré que les valeurs obtenues en dernier lieu des dix inconnues de l'article XIII du Mémoire de M. Housel satisfont aux douze équations de cet article (les valeurs des inconnues ne sont pas données sous forme explicite, et il y en a seulement dix, et non pas onze, parce que p dépend de X, Y, Z). Et la conclusion, considérée en elle-même, est inadmissible, car une transformation homologique de l'espace doit changer le cercle imaginaire, suivant lequel toutes les sphères se coupent en un cercle, tandis que, en général, ce cercle est changé en une ellipse imaginaire par la transformation homographique. Ensuite, la relation homographique dépend de quinze constantes, la relation homologique de sept, et les six constantes de déplacement peuvent seulement réduire les quinze constantes à neuf. Ainsi, il semblerait à priori que deux conditions doivent être satisfaites, lorsque deux espaces homographiques seraient capables d'une position homologique, et l'équation $A = B$ (ou $a' = b$) de l'art. 50 est équivalente à deux rotations indépendantes entre les quinze constantes de l'homographie, puisque

(74)

cette équation est équivalente aux deux conditions nécessaires pour qu'une certaine conique devienne un cercle.