

E. VAZEILLE

**Cordes principales et plans principaux
d'une surface du second ordre**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 10
(1871), p. 5-17

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10_5_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1871, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

CORDES PRINCIPALES ET PLANS PRINCIPAUX D'UNE SURFACE DU SECOND ORDRE;

PAR M. E. VAZEILLE.

Prenons une surface quelconque du second ordre représentée en coordonnées rectanglées par l'équation cartésienne

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0.$$

L'on sait qu'à toute direction de cordes correspond un plan diamétral; et si l'on nomme α, β, γ les cosinus des angles que la direction de ces cordes fait avec les axes des coordonnées, l'équation du plan diamétral est

$$(A\alpha + B''\beta + B'\gamma)x + (B''\alpha + A'\beta + B\gamma)y + (B'\alpha + B\beta + A''\gamma)z + C\alpha + C'\beta + C''\gamma = 0;$$

l'on nomme *corde principale* toute direction perpendiculaire à son plan diamétral; une telle direction doit donc être assujettie aux deux conditions suivantes :

$$\frac{A\alpha + B''\beta + B'\gamma}{\alpha} = \frac{B''\alpha + A'\beta + B\gamma}{\beta} = \frac{B'\alpha + B\beta + A''\gamma}{\gamma}.$$

Ces deux conditions, jointes à la relation connue

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

montrent d'abord que les directions cherchées, étant tracées à partir de l'origine et désignées chacune par le point où elle perce une sphère décrite autour de l'origine comme centre avec un rayon égal à l'unité de longueur, sont les génératrices communes aux trois cônes de même sommet, dont les équations sont

$$\begin{aligned} \frac{A\alpha + B''\beta + B'\gamma}{\alpha} &= \frac{B''\alpha + A'\beta + B\gamma}{\beta}, \\ \frac{B''\alpha + A'\beta + B\gamma}{\beta} &= \frac{B'\alpha + B\beta + A''\gamma}{\gamma}, \\ \frac{B'\alpha + B\beta + A''\gamma}{\gamma} &= \frac{A\alpha + B''\beta + B'\gamma}{\alpha}, \end{aligned}$$

et l'on arriverait facilement à démontrer que ces trois cônes du second ordre ont trois génératrices en commun; la démonstration serait au fond la même, mais moins claire dans la forme, que celles dont l'exposition va suivre.

Si nous désignons par S la valeur commune des trois rapports dont l'égalité caractérise toute direction de cordes principales, et si nous prenons S comme inconnue auxiliaire, nous dirons :

A toute direction principale correspond une valeur de S qui rend compatibles, par rapport aux inconnues α , β , γ , le système linéaire et homogène

$$(1) \quad \begin{cases} A\alpha + B''\beta + B'\gamma = S\alpha, \\ B''\alpha + A'\beta + B\gamma = S\beta, \\ B'\alpha + B\beta + A''\gamma = S\gamma, \end{cases}$$

(7)

ou, ce qui revient au même, le système

$$(2) \quad \begin{cases} (A - S)\alpha + B''\beta + B'\gamma = 0, \\ B''\alpha + (A' - S)\beta + B\gamma = 0, \\ B'\alpha + B\beta + (A'' - S)\gamma = 0; \end{cases}$$

donc S est déterminé par l'équation suivante :

$$(3) \quad \begin{vmatrix} A - S & B'' & B' \\ B'' & A' - S & B \\ B' & B & A'' - S \end{vmatrix} = 0,$$

laquelle peut s'écrire

$$(4) \quad \begin{cases} (S - A)(S - A')(S - A'') - B^2(S - A) \\ - B'^2(S - A') - B''^2(S - A'') - 2BB'B'' = 0, \end{cases}$$

ou bien encore

$$(5) \quad \begin{cases} S^3 - (A + A' + A'')S^2 \\ + (A'A'' - B^2 + A''A - B'^2 + AA' - B''^2)S \\ - (AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2) = 0. \end{cases}$$

Cette équation est susceptible, du moins tant que les coefficients B, B', B'' sont essentiellement différents de zéro, de prendre une autre forme remarquable, ainsi que nous allons le prouver en suivant une marche indiquée par M. Lamé dans ses *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité*.

Les équations (1), en ajoutant à leurs deux membres des expressions convenablement choisies, après les avoir multipliées respectivement par B, B', B'', deviennent

$$B'B''\alpha + B''B\beta + BB'\gamma = B\alpha \left(S - A + \frac{B'B''}{B} \right),$$

$$B'B''\alpha + B''B\beta + BB'\gamma = B'\beta \left(S - A' + \frac{B''B}{B'} \right),$$

$$B'B''\alpha + B''B\beta + BB'\gamma = B''\gamma \left(S - A'' + \frac{BB'}{B''} \right),$$

ou, en désignant par V le premier membre qui est commun à toutes, et par h, h', h'' les expressions $A - \frac{B'B''}{B}$,
 $A' - \frac{B''B}{B'}$, $A'' - \frac{BB'}{B''}$,

$$\frac{1}{B(S-h)} = \frac{\alpha}{V}, \quad \frac{1}{B'(S-h')} = \frac{\beta}{V}, \quad \frac{1}{B''(S-h'')} = \frac{\gamma}{V}.$$

Si l'on multiplie ces trois équations respectivement par les facteurs $B'B''$, $B''B$, BB' , et si on les ajoute ensuite, il vient

$$(6) \quad \frac{B'B''}{B(S-h)} + \frac{B''B}{B'(S-h')} + \frac{BB'}{B''(S-h'')} = 1,$$

comme résultat de l'élimination de α, β, γ entre les équations du groupe (1); c'est donc là une forme nouvelle de l'équation (3). Mais, ainsi que nous l'avons dit déjà, cette forme ne subsiste que si les coefficients B, B', B'' sont tous différents de zéro; le calcul qui précède le démontre clairement.

En résumé, l'inconnue auxiliaire S est déterminée par une équation du troisième degré; S aura donc, en général, trois valeurs distinctes; chacune de ces valeurs, portée dans les équations (2), les rendra compatibles, c'est-à-dire les réduira à deux équations distinctes, d'où l'on déduira un système de valeurs proportionnelles pour α, β, γ ; ainsi toute valeur de S produit une direction principale; on peut donc déjà dire, au point de vue algébrique, que le problème a trois solutions; mais il est indispensable d'entrer dans le détail, d'étudier soigneusement l'équation auxiliaire du troisième degré, et de montrer les conséquences de cette étude pour les surfaces du second ordre.

C'est dans cette étude détaillée que nous rencontrerons les noms de nos plus grands géomètres, Lagrange, Cau-

chy, Lamé, Chasles parmi les Français, Jacobi parmi les Allemands; d'ailleurs l'ordre que nous suivrons ne concordera que bien rarement avec l'ordre historique.

Nous démontrerons d'abord que l'équation du troisième degré a ses trois racines réelles et généralement distinctes; nous donnerons de ce fait plusieurs démonstrations différentes, parce que chacune d'elles aura des conséquences nouvelles.

PREMIÈRE MÉTHODE. — La compatibilité des équations qui forment le système (1) ou (2) étant exprimée, on a, par cela même, exprimé que la courbe

$$Ax^2 + A'y^2 + A'' + 2By + 2B'x + 2B''xy - S(x^2 + y^2 + 1) = 0,$$

menée par l'intersection des deux coniques

$$Ax^2 + A'y^2 + A'' + 2By + 2B'x + 2B''xy = 0$$

et

$$x^2 + y^2 + 1 = 0,$$

est un système de deux droites; or l'une des deux coniques au moins, celle dont l'équation est $x^2 + y^2 + 1 = 0$, est une conique imaginaire; donc l'équation du troisième degré, qui sert à déterminer les systèmes de cordes communes, c'est-à-dire l'équation (3), a ses trois racines réelles; et ces trois racines sont en général distinctes, car l'autre conique est absolument quelconque en vertu des valeurs absolument quelconques des coefficients A, A', A'', B, B', B'' .

Cette méthode est, au fond, très-indirecte, car elle suppose connu, sur l'intersection de deux coniques, un théorème fondamental; néanmoins nous avons dû la mentionner d'abord à cause de son origine géométrique; car nous pouvons la rattacher à un procédé de M. Chasles, procédé dont elle est en quelque sorte la traduction analytique.

Pour expliquer commodément cette interprétation, nous rappellerons :

1° Que, dans toute conique, on peut construire un nombre illimité de triangles polaires conjugués relativement à cette conique ;

2° Que, si cette conique sert de base à un cône ayant son sommet en un point quelconque de l'espace, les trois droites allant du sommet du cône aux trois sommets d'un triangle polaire conjugué forment un système de diamètres conjugués de la surface conique ; cela résulte immédiatement de ce que toute section dont le plan est parallèle à deux des trois droites a son centre sur la troisième.

Cela posé, les deux courbes dont les équations sont

$$\begin{aligned} Ax^2 + A'y^2 + A'' + 2By + 2B'x + 2B''xy &= 0, \\ x^2 + y^2 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

sont les intersections, par un même plan dont l'équation est $z = 1$, des deux cônes représentés par

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0$$

et

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

Ces deux cônes, qui ont pour sommet commun l'origine, sont asymptotiques, le premier à la surface du second ordre, l'autre à une sphère quelconque ; et la résolution de l'équation en S détermine en réalité les systèmes de directions conjuguées communs à la surface quelconque du second ordre et à une sphère ; donc

Toute surface du second ordre a un système de diamètres conjugués qui lui est commun (en direction) avec une sphère ; en d'autres termes, une surface quelconque du second ordre a trois directions distinctes de cordes

principales, et ces directions sont perpendiculaires entre elles deux à deux; en outre, ces directions sont les mêmes pour toutes les surfaces du second ordre qui ont le même cône asymptotique.

On voit que notre premier mode de démonstration nous conduit immédiatement à une proposition importante, à savoir : la rectangularité des cordes principales entre elles; or il est utile, il est facile aussi d'établir cette proposition par le calcul.

Désignons en effet par S_1 et S_2 deux racines distinctes de l'équation (3); désignons ensuite par $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, et par $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ les solutions qui leur correspondent respectivement par les équations (1); on aura identiquement les relations

$$\begin{aligned} A\alpha_1 + B''\beta_1 + B'\gamma_1 &= S_1\alpha_1, & A\alpha_2 + B''\beta_2 + B'\gamma_2 &= S_2\alpha_2, \\ B''\alpha_1 + A'\beta_1 + B\gamma_1 &= S_1\beta_1, & B''\alpha_2 + A'\beta_2 + B\gamma_2 &= S_2\beta_2, \\ B'\alpha_1 + B\beta_1 + A''\gamma_1 &= S_1\gamma_1, & B'\alpha_2 + B\beta_2 + A''\gamma_2 &= S_2\gamma_2. \end{aligned}$$

Multiplions les trois premières respectivement par $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; multiplions les trois autres respectivement par $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, et de la somme des unes retranchons la somme des autres; il restera

$$(S_1 - S_2)(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2) = 0.$$

Or, par hypothèse, S_1 et S_2 sont des racines distinctes; on a donc la simple condition

$$(7) \quad \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0.$$

On peut remarquer que cette relation (7) vient d'être démontrée par un procédé purement algébrique, et qu'elle ne suppose en rien la réalité démontrée des expressions S_1 et S_2 ; il est même possible, et très-simplement, par voie de réduction à l'absurde, de montrer que la relation (7)

entraîne la réalité des racines de l'équation (3); mais nous ne croyons pas devoir insister sur ce détail. Revenant donc à la méthode qui fait l'objet de ce paragraphe, nous dirons qu'elle a été exposée sous la forme purement géométrique par M. Chasles dans un Mémoire intitulé : *Sur les lignes conjointes dans les coniques* (*); le lecteur y trouvera, en effet, la solution de ce problème : *Étant donné un cône du second degré dont on connaît la base et le sommet, on demande de déterminer ses axes principaux*; et l'auteur ramène la question à la recherche des points de concours des lignes conjointes relatives à une conique et à un cercle imaginaire, de telle sorte que notre première méthode peut et doit être considérée comme une traduction algébrique des raisonnements géométriques de M. Chasles. Il se trouve ainsi prouvé, une fois de plus, que les plus illustres propagateurs de la Géométrie pure ont fait et font encore souvent de l'Algèbre à leur manière; la forme ne fait rien à l'affaire; d'ailleurs la possibilité de reproduire leurs raisonnements sous des formes algébriquement élégantes et simples est un moyen aussi de montrer la haute valeur scientifique des hommes qui, comme Poncelet et M. Chasles, font la gloire de la France sans rien emprunter aux étrangers.

DEUXIÈME MÉTHODE. — Elle consiste à se servir de l'équation du troisième degré sous la forme (6), et porte le nom de *méthode de Jacobi*; elle est donc restreinte au cas où les coefficients B, B', B'' sont tous différents de zéro; elle n'en a pas moins une grande importance et une généralité suffisante, car nous verrons bientôt que l'une des conséquences pratiques de la résolution de notre équation du troisième degré est de faire disparaître, par

(*) *Journal de Mathématiques*, 1^{re} série, t. III, p. 427.

un choix convenable d'axes, les trois rectangles des variables de l'équation générale des surfaces du second ordre.

Cela dit, remarquons que les trois quantités

$$\frac{B'B''}{B}, \quad \frac{B''B}{B'}, \quad \frac{BB'}{B''}$$

ont le même signe; de sorte qu'en appelant m^2 , n^2 , p^2 leurs valeurs absolues, et en supposant que les quantités h , h' , h'' soient différentes et rangées dans l'ordre de grandeur croissante, l'équation s'écrit

$$\frac{m^2}{S-h} + \frac{n^2}{S-h'} + \frac{p^2}{S-h''} \mp 1 = 0.$$

Dès lors, si l'on fait dans le premier membre les substitutions successives

$$-\infty \quad h - \varepsilon \mid h + \varepsilon \quad h' - \varepsilon \mid h' + \varepsilon \quad h'' - \varepsilon \mid h'' + \varepsilon \quad +\infty,$$

on trouvera les signes

$$\mp \quad -\infty \mid +\infty \quad -\infty \mid +\infty \quad -\infty \mid +\infty \quad \mp;$$

donc il y a une racine réelle entre h et h' , une autre entre h' et h'' ; la troisième est antérieure à h si le produit $BB'B''$ est négatif; elle vient au contraire après h'' si le produit $BB'B''$ est positif.

Cette démonstration suppose que les quantités h , h' , h'' , c'est-à-dire

$$A - \frac{B'B''}{B}, \quad A' - \frac{BB''}{B'}, \quad A'' - \frac{BB'}{B''},$$

sont différentes les unes des autres; or cette supposition est légitime, puisque, dans le cas général, les coefficients A , A' , A'' sont indépendants les uns les autres.

Comme la première démonstration, la seconde montre d'une manière évidente que les trois racines de l'équation (6) sont distinctes; comme la première aussi, elle fait voir que les directions de cordes principales qui en résultent sont bien déterminées, et au nombre de *trois* seulement. Pour établir ce dernier fait, il faut démontrer que chacune des valeurs de S, qui réduit les équations (2) à un système homogène de deux équations seulement, laisse ces deux équations fournir des valeurs bien déterminées pour les rapports $(\alpha : \gamma)$ et $(\beta : \gamma)$.

Or des deux premières, par exemple, on tire

$$\frac{\alpha}{B''B - B'(A' - S)} = \frac{\beta}{B'B'' - B(A - S)} = \dots,$$

ou bien

$$\frac{\alpha}{B'(S - h')} = \frac{\beta}{B(S - h)} = \dots$$

Or, d'après la séparation établie plus haut, aucune valeur de S, dans le cas général, n'est égale ni à h , ni à h' , ni à h'' ; donc les rapports $\frac{\alpha}{\beta}, \dots$, qui proviennent de chaque valeur de S, sont bien déterminés.

La démonstration algébrique, pour établir que les directions principales sont rectangulaires entre elles deux à deux, se ferait comme nous l'avons vu en exposant la première méthode, et nous ne devons pas y revenir.

TROISIÈME MÉTHODE. — Cette méthode, dite *méthode de Cauchy*, démontre, comme la seconde, la réalité des racines au moyen de substitutions convenablement choisies; mais elle a l'avantage de n'être pas soumise aux mêmes restrictions que la méthode de Jacobi, de s'adapter très-naturellement aux divers cas particuliers, et d'être spécialement commode dans certaines applications.

Prenons l'équation du troisième degré sous la forme (4),

et écrivons-la comme ci-dessous :

$$(S - A)[(S - A')(S - A'') - B^2] - [B'^2(S - A') + B''^2(S - A'') + 2BB'B''] = 0,$$

et cherchons les valeurs de S qui annulent la fonction du second degré

$$(S - A')(S - A'') - B^2.$$

Il existe deux valeurs réelles et distinctes de S qui annulent cette quantité, et si l'on suppose, par exemple, $A' < A''$, ces deux valeurs sont l'une inférieure à A' , l'autre supérieure à A'' . Tout cela est très-facile à voir à l'aide de quelques substitutions. Nommons θ' et θ'' ces deux valeurs, et soit $\theta' < \theta''$; puis remarquons que chacune de ces valeurs, qui annule

$$(S - A')(S - A'') - B^2,$$

fait un carré parfait, au signe près, de l'expression

$$B'^2(S - A') + B''^2(S - A'') + 2BB'B''.$$

D'après cela, si nous faisons, dans le premier membre de l'équation (4), les substitutions

$$- \infty \quad \theta' \quad \theta'' \quad + \infty,$$

nous trouverons les signes

$$- \quad + \quad - \quad +;$$

donc l'équation (4) a trois racines réelles, et ces racines sont par cela même séparées.

Il nous semble utile d'adjoindre à l'exposé général de cette troisième méthode la discussion des cas particuliers qui échappent à la seconde.

Premier cas : $B = 0$, l'équation (4) devient alors

$$(S - A)(S - A')(S - A'') - B'^2(S - A') - B''^2(S - A'') = 0,$$

et peut s'écrire

$$(8) \quad S - A - \frac{B'^2}{S - A''} - \frac{B''^2}{S - A'} = 0.$$

Dès lors, si nous supposons, par exemple, $A' < A''$, le tableau des substitutions suivantes et des signes qu'elles donnent au premier membre de l'équation (8)

$$\begin{array}{ccccccc} -\infty & A' - \varepsilon & | & A' + \varepsilon & A'' - \varepsilon & | & A'' + \varepsilon & +\infty \\ - & + & & - & + & & - & + \end{array}$$

suffit à démontrer la réalité des trois racines et à séparer ces racines.

Deuxième cas : $B = 0$ avec $B' = 0$, l'équation (4) devient alors

$$(S - A)(S - A')(S - A'') - B''^2(S - A'') = 0,$$

ou bien

$$(S - A'')[S - A)(S - A') - B''^2] = 0,$$

et l'on voit qu'elle a ses trois racines réelles et généralement distinctes

Troisième cas : $B = 0$, $B' = 0$, $B'' = 0$, l'équation (4) devient alors

$$(S - A)(S - A')(S - A'') = 0,$$

et l'on voit immédiatement qu'elle a trois racines réelles et généralement distinctes, qui sont A , A' , A'' .

Ces trois cas particuliers ne présentent donc pas d'exception relativement à la réalité des racines de l'équation auxiliaire du troisième degré; mais ils offrent cela de remarquable : dans le second cas, la racine $S = A''$, transportée dans les équations (2), donne

$$\begin{aligned} (A - A'')\alpha + B''\beta &= 0, \\ B''\alpha + (A' - A'')\beta &= 0; \end{aligned}$$

d'où l'on conclut $\alpha = 0$, $\beta = 0$, et par suite $\gamma = 1$; en d'autres termes, toute surface du second ordre dont l'équation ne contient aucun des deux rectangles yz et zx a une direction de cordes principales parallèle à l'axe des z . Dans le troisième cas, on verra de même que les trois directions de cordes principales coïncident avec les directions des axes des coordonnées rectangulaires.

D'ailleurs, dans ces divers cas particuliers, subsiste, ainsi qu'on le voit facilement, la perpendicularité des directions principales entre elles.

Ici se trouve donc terminée l'exposition des faits relatifs aux racines de l'équation auxiliaire du troisième degré, tant que cette équation reste suffisamment générale, c'est-à-dire tant que les trois racines de cette équation sont différentes les unes des autres.

Il nous reste à examiner sous quelles conditions ces racines peuvent cesser d'être distinctes.

(La suite prochainement.)
