NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CHASLES

Propriétés des diamètres des courbes géométriques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 10 (1871), p. 529-537

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__529_0>

PROPRIÉTÉS DES DIAMÈTRES DES COURBES GÉOMÉTRIQUES;

PAR M. CHASLES.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXII.)

Newton, dans son *Énumération des courbes du troisième ordre,* a fait connaître et a appelé *diamètre* d'une courbe une certaine droite, qui est le lieu des centres de gravité (ou centres des moyennes distances) des points dans lesquels une série de droites parallèles rencontrent la courbe.

Cette belle propriété des courbes géométriques paraît être la première que l'on ait connue. Newton la présentait comme une généralisation, ainsi que celle du rapport constant des produits des segments faits sur deux transversales parallèles à deux axes fixes, des propriétés des sections coniques. Elles étaient susceptibles elles-mêmes d'une certaine généralisation, qu'on obtient par une simple perspective, dans laquelle les droites parallèles deviennent des droites concourantes en un même point. Le théorème des diamètres conduit ainsi, comme l'a fait remarquer M. Poncelet (*), au beau théorème de Côtes, démontré par Maclaurin, savoir que, « si sur des transversales partant d'un point fixe on prend les centres des moyennes harmoniques des points d'intersection de ces droites et d'une courbe géométrique, le lieu de ces points est une droite (**), » droite que l'on a appelée depuis *axe harmonique* du point fixe.

(*) *Mémoires sur les centres des moyennes harmoniques;* voir *Journal de Crelle,* t. III.

(**) MACLAURIN, *Traité des courbes géométriques.*

On s'est fort peu occupé jusqu'ici de la conception des *diamètres* de Newton, dont on ne trouve peut-être quelques propriétés que dans un Mémoire de Steiner. Bien que le théorème de Côtes n'ait pas été non plus le sujet de recherches spéciales, il intervient dans la belle théorie des *polaires* des courbes, de Bobillier (*), où il prend une importance réelle par son association avec la courbe même que l'on appelle la *polaire* d'une courbe donnée U. Que celle-ci soit d'ordre m, la polaire est une courbe d'ordre $(m-1)$ qui passe par les points de contact des $m(m-1)$ tangentes de U qu'on peut mener par un point fixe. Ce point est dit le *pôle* de la polaire. Bobillier considère la polaire de la courbe d'ordre $(m-1)$, laquelle est d'ordre $m-2$; puis la polaire de celle-ci, et ainsi de suite, et arrive à une conique dont la polaire est une droite. Cette droite est précisément l'*axe harmonique* du point fixe, relatif à la courbe d'ordre m. Un théorème général fort important, concernant deux quelconques des polaires successives (**), renferme en particulier cette double proposition, relative à la première polaire d'une courbe et à la dernière, c'est-à-dire à l'*axe harmonique* :

La polaire d'un point P *est le lieu des points dont les axes harmoniques passent par ce point* P.

Et réciproquement : *L'axe harmonique d'un point est le lieu des points dont les polaires passent par le point.*

Cette double propriété des *axes harmoniques* est la clef de cette théorie. Ainsi l'on conclut immédiatement du second énoncé que : *Une droite, considérée comme*

(*) Voir *Annales de Mathématiques* de Gergonne, t. XVIII. 1827-1828, p. 89, 157, 253, et t. XIX, p. 106, 138, 302.

(**) *Ibid.*, t. XIX, p. 302-307.

axe harmonique, $a(m-1)^2$ *pôles, qui sont les points d'intersection des polaires de deux points de la droite;* et, par suite, que ces $(m-1)^2$ points appartiennent aux polaires de tous les autres points de la droite; que *ces polaires forment donc un faisceau d'ordre* $(m-1)$; d'où se conclut aussi que $2(m-2)$ *de ces polaires sont tangentes à une droite quelconque :* proposition fort utile, et de laquelle dérive aussi cette propriété fondamentale de la théorie des axes harmoniques, savoir que :

La courbe enveloppe des axes harmoniques des points d'une droite D *est de la classe* $(m-1)$.

C'est-à-dire que $(m-1)$ axes harmoniques passent par un même point I. En effet, les axes qui passent par ce point ont leurs pôles sur la polaire du point I; or cette polaire, d'ordre $m-1$, a $(m-1)$ points sur la droite D; ce sont les pôles des $(m-1)$ axes harmoniques passant par le point I.

On reconnaît aussi que cette courbe de la classe $(m-1)$ est de l'ordre $(m-2)$, c'est-à-dire qu'elle a $2(m-2)$ points sur une droite quelconque L. En effet, un point de la courbe est l'intersection des axes harmoniques de deux points infiniment voisins a, a' de la droite D. Ce point d'intersection est le pôle d'une polaire passant par les deux points a, a', et conséquemment tangente à la droite D en a. Mais les polaires de tous les points de la droite forment un faisceau d'ordre $(m-1)$; il y en a donc $2(m-2)$ qui sont tangentes à la droite D. Or les axes harmoniques des $2(m-2)$ points de contact sont tangents à leur courbe enveloppe aux points où ils coupent la droite L; ce qui démontre que la courbe est de l'ordre $2(m-2)$.

Steiner, dans un travail fort étendu, concernant les courbes algébriques et leurs transversales rectilignes, dont l'analyse a été communiquée à l'Académie de Berlin, en mai 1851 (*), a considéré les *diamètres* de Newton, et en fait connaître quelques propriétés. On y trouve notamment la classe et l'ordre de la courbe enveloppe de ces diamètres, et deux théorèmes que j'indiquerai parmi ceux qui font le sujet de ma Communication. J'ignore si les démonstrations du beau Mémoire de Steiner ont été publiées depuis sa mort, et si d'autres géomètres se sont occupés aussi de cette théorie des diamètres.

C'est par le principe de correspondance que je démontre toutes les propositions qui vont suivre, et que je réunis ici comme nouvel exemple des applications si variées de ce mode de raisonnement.

§ I. — *Où l'on considère deux séries de points qui se correspondent anharmoniquement sur la droite de l'infini.*

1. Si l'on a sur la droite située à l'infini deux séries de points a, a' qui se correspondent anharmoniquement, une courbe U_m possède m diamètres dont les transversales passent par les points a' qui correspondent aux points a des diamètres.

Par conséquent :

a. Il existe, dans une courbe U_m, m diamètres dont chacun fait, avec la direction de ses transversales, un angle de grandeur constante, compté dans un sens de rotation déterminé.

b. Il existe m diamètres perpendiculaires chacun à ses transversales.

c. Il existe m diamètres faisant avec leurs transversales des angles dont la bissectrice est de direction constante.

(*) Voir *Journal de Mathématiques*, de Crelle, t. XLVII, p. 7-106; 1854. Une traduction due au regretté M. Woepcke, avait déjà paru dans le *Journal de Mathématiques*, de M. Liouville, t. XVIII, p. 315-356; 1853.

Dans les propositions suivantes, susceptibles de trois énoncés différents, nous ne donnerons que l'énoncé relatif aux perpendiculaires.

2. Les perpendiculaires aux transversales des diamètres, menées par les points où ces diamètres rencontrent la courbe U_m, enveloppent une courbe de la classe m^2, qui a une tangente multiple d'ordre $m(m-1)$ à l'infini.

3. Deux diamètres, dont l'un est perpendiculaire aux transversales de l'autre, se coupent sur une courbe de l'ordre $m(m-2)$, qui a m points multiples d'ordre $(m-2)$ à l'infini.

4. Deux diamètres dont les transversales sont rectangulaires se coupent sur une courbe de l'ordre $2(m-2)$.

5. Deux diamètres rectangulaires se coupent sur une courbe de l'ordre $2(m-1)(m-2)$, qui a deux points multiples d'ordre $(m-1)(m-2)$ à l'infini.

§ II. — *Où l'on considère les points de rencontre des diamètres et de la courbe U_m.*

6. Les transversales des diamètres, menées par les points où ils rencontrent la courbe U_m, enveloppent une courbe de la classe $m(m-1)$, qui a une tangente multiple d'ordre $m(m-2)$ à l'infini.

7. Si, par le centre des moyennes distances des points de rencontre d'un diamètre et de la courbe U_m, on mène la transversale du diamètre, ces transversales enveloppent une courbe de la classe (m^2-2m-1), qui a une tangente multiple d'ordre $m(m-2)$ à l'infini.

8. Les centres des moyennes distances des points d'intersection de chaque diamètre avec la courbe U_m sont sur une courbe de l'ordre $m(m-2)$, qui a m points multiples d'ordre $(m-2)$ à l'infini.

9. Les transversales des diamètres, menées par leurs

points de contact avec leur courbe enveloppe sont les tangentes d'une courbe de la classe $(2m - 3)$, qui a une tangente multiple d'ordre $(m - 2)$ à l'infini (*).

10. Les perpendiculaires aux transversales des diamètres, menées par leurs points de contact avec leur courbe enveloppe, sont les tangentes d'une courbe de la classe $(2m - 3)$.

11. Les transversales des diamètres, menées par les points où ils rencontrent la courbe U_m, enveloppent une courbe de la classe $m(m - 1)$.

§ III. — *Où l'on considère les tangentes et les normales de la courbe* U_m.

12. Les diamètres de la courbe U_m^n rencontrent les tangentes de cette courbe parallèles aux transversales des diamètres, en des points situés sur une courbe de l'ordre $m(n - 1)$.

13. Les diamètres de U_m^n rencontrent les tangentes qui leur sont perpendiculaires en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $2n(m - 1)$, qui a deux points multiples d'ordre $n(m - 1)$ aux deux points circulaires de l'infini.

14. Les diamètres de U_m^n rencontrent les normales parallèles à leurs transversales sur une courbe de l'ordre $m(n + 1)$, qui a m points multiples d'ordre n, et m points simples à l'infini.

15. Les diamètres de U_m^n rencontrent les tangentes perpendiculaires à leurs transversales sur une courbe de l'ordre mn, qui a m points multiples d'ordre n à l'infini.

(*) Ce théorème et le précédent sont les deux de Steiner, que nous avons annoncés ci-dessus. (Voir *Journal de Mathématiques* de M. Liouville, t. XVIII, p. 340 et 341.)

16. Les diamètres de U_m^n rencontrent les normales qui leur sont perpendiculaires sur une courbe de l'ordre $(m-1)(m+2n)$, qui a à l'infini deux points multiples d'ordre $n(m-1)$ aux deux points circulaires et m points multiples d'ordre $(m-1)$ aux points de U_m^n.

17. Les diamètres de U_m^n rencontrent les normales perpendiculaires à leurs transversales sur une courbe de l'ordre $m(n+1)$.

18. Si, par les points où les diamètres rencontrent la courbe U_m, on leur mène des perpendiculaires, ces perpendiculaires enveloppent une courbe de la classe $2m(m-1)$, qui a une tangente multiple d'ordre $m(m-1)$ à l'infini.

§ IV. — *Où l'on considère une courbe $U_{m'}^{n'}$ en rapport avec les diamètres de la courbe U_m.*

19. Les tangentes d'une courbe $U^{n'}$ parallèles aux transversales d'un diamètre d'une courbe U_m rencontrent ce diamètre en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre mn'.

20. Les normales d'une courbe $U_{m'}^{n'}$ parallèles aux transversales d'un diamètre de U_m rencontrent ce diamètre en des points situés sur une courbe de l'ordre $m'+mn'$.

21. Les normales d'une courbe $U_{m'}^{n'}$ perpendiculaires aux transversales d'un diamètre de U_m rencontrent ce diamètre sur une courbe d'ordre $mn'+m'$.

22. Si, par les points où les diamètres de U_m rencontrent une courbe $U_{m'}$ on mène des parallèles à leurs transversales, ces parallèles enveloppent une courbe de la classe mm'.

23. Si, par les points de rencontre des diamètres de U_m et d'une courbe $U_{m'}$, on mène des perpendiculaires aux

transversales des diamètres, ces perpendiculaires enveloppent une courbe de la classe mm'.

24. Les diamètres de deux courbes U_m, U_{m_1} conjugués aux mêmes transversales se coupent sur une courbe d'ordre $(m + m_1 - 2)$.

§ V. — *Diamètres d'une courbe* U_m *en relation avec une courbe unicursale* $U_{m'}$.

On a sur une courbe unicursale quelconque $U_{m'}$ d'ordre m', deux séries de points α, α' qui se correspondent anharmoniquement. Les théorèmes suivants se rapportent à ces deux séries de points.

25. *Lemme.* — Il existe, sur la courbe unicursale $U_{m'}$, $2mm'$ points α tels, qu'un diamètre de U_m, passant par chacun de ces points α, a pour transversale la droite menée d'un point donné P au point α'.

26. Si l'on mène par chaque point a de $U_{m'}$ les diamètres de U_m, les transversales de ces diamètres, menées par les points correspondants α', enveloppent une courbe de la classe mm'.

27. Les diamètres menés par chaque point α rencontrent leurs transversales menées par le point α', en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $m'(2m - 1)$.

28. Les diamètres passant par chaque point α rencontrent les transversales menées avec leurs propres diamètres par le point α', en des points situés sur une courbe de l'ordre $m(m' - 1)(2m - 1)$.

29. Par chaque point α on mène les transversales des diamètres qui passent par ce point; et de même, par chaque point correspondant α' on mène les transversales des diamètres qui passent par ce point : ces transversales rencontrent les premières sur une courbe de l'ordre $2m'm(m - 1)$.

30. Les perpendiculaires élevées par chaque point α sur les diamètres qui passent par ce point rencontrent les transversales des diamètres menées par les points α' sur une courbe de l'ordre mm'.