NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions des questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 10 (1871), p. 514-528

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__514_1>

SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 966

(voir 2e série, t. VII, p. 561),

PAR M. MORET-BLANC,
Professeur au lycée du Havre.

Si l'on désigne par C_m^p le nombre des combinaisons sans répétition de m objets p à p, en regardant C_m^0 comme égal à l'unité, on a l'identité suivante :

$$C_k^0\,C_{n+1}^{2k+1} + C_{k+1}^1\,C_{n+1}^{2k+3} + C_{k+2}^2\,C_{n+1}^{2k+5} + \ldots = 2^{n-2k}\,C_{n-k}^k.$$

(DÉSIRÉ ANDRÉ.)

On sait que C_m^p est le coefficient de x^p dans le développement de $(1+x)^m$.

Cela posé, le premier membre de l'égalité à démontrer est le coefficient de x^{2k+1} dans le developpement de

$$(1+x)^{n+1}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{-(k+1)}.$$

Or,

$$(1+x)^{n+1}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{-(k+1)} = (1+x)^{n+1}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{k+1}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-(k+1)}$$
$$= x^{k+1}(1+x)^{n-k}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-(k+1)},$$

et le coefficient de x^{2k+1}, dans cette expression, sera celui de x^k dans le développement de

$$(1+x)^{n-k}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-(k+1)},$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} & C_{n-k}^{k} + C_{k+1}^{1} C_{n-k}^{k+1} + C_{k+2}^{2} C_{n-k}^{k+2} + \ldots \\ & = C_{n-k}^{k}\left(1 + \frac{n-2k}{1} + \frac{(n-2k)(n-2k-1)}{1.2} \right. \\ & \qquad \left. + \frac{(n-2k)(n-2k-1)(n-2k-2)}{1.2.3} + \ldots + 1\right) \\ & = (1+1)^{n-2k} C_{n-k}^{k} = 2^{n-2k} C_{n-k}^{k}. \end{aligned}$$

On a donc identiquement

$$C_k C_{n+1}^{2k+1} + C_{k+1}^{1} C_{n+1}^{2k+3} + C_{k+2}^{2} C_{n+1}^{2k+5} + \ldots = 2^{n-2k} C_{n-k}^{k}.$$

C. Q. F. D.

Note. — La même question a été résolue par M. Kruschwitz, étudiant en Mathématiques, à Berlin.

Questions 968 *et* 969

(voir 2e série, t VIII, p. 561),

PAR M. LUCIEN BIGNON, de Lima (Pérou).

968. *Si l'on désigne par n un nombre entier positif, et par* D_n *la différence des puissances* $n^{\text{ièmes}}$ *des racines*

de l'équation $x^2 + px + q = 0$, on aura, à partir de $n = 2$,

$$D_n = (-1)^{n-1}\left[p^{n-1} - \frac{n-2}{1} p^{n-3} q + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2} p^{n-5} q^2 - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3} p^{n-7} q^3 + \ldots\right] D_1;$$

le développement s'arrête pour une valeur particulière de n, au dernier terme qui ne s'évanouit pas.

969. *Déduire de la formule précédente la relation*

$$n = 2^{n-1} - \frac{n-2}{1} 2^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2} 2^{n-5} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3} 2^{n-7} + \ldots.$$

(G.-P.-W. BAEHR.)

968. Soient a et b les racines de l'équation

$$x^2 + px + q = 0;$$

la formule est vraie pour $n = 2$ et $n = 3$; il suffit donc de faire voir que, si elle est vraie pour l'indice $n - 1$ et pour l'indice $n - 2$, elle l'est aussi pour l'indice n.

Or, nous avons l'identité

$$a^n - b^n = (a^{n-1} - b^{n-1})(a + b) - ab(a^{n-2} - b^{n-2})$$

et

$$a + b = -p, \quad ab = q;$$

puis, par suite de l'hypothèse,

$$(a^{n-1} - b^{n-1})(a + b) = (-1)^{n-3}\left[p^{n-1} - \frac{n-3}{1} p^{n-3} q + \frac{(n-4)(n-5)}{1.2} p^{n-5} q^2 + \ldots\right] D_1$$

et

$$
\begin{aligned}
&-ab\,(a^{n-2}-b^{n-2})\\
&=(-1)^{n-3}\left[-p^{n-3}q+\frac{n-4}{1}p^{n-5}q^2\right.\\
&\qquad\left.-\frac{(n-5)(n-6)}{1.2}p^{n-7}q^3+\ldots\right]D_1.
\end{aligned}
$$

Le terme de rang $(m+1)$, dans la première de ces deux équations, est, en ne tenant compte que de ce qui est dans la parenthèse,

$$\pm\frac{[n-(m+2)]\ldots(n-2m)[n-(2m+1)]}{1.2\ldots m}.$$

Le terme de rang m dans la seconde, qui a le même coefficient en p et en q que celui dont nous venons de trouver la valeur, est

$$\pm\frac{[n-(m+2)]\ldots[n-(2m-1)](n-2m)}{1.2\ldots(m-1)}.$$

En faisant la somme de ces deux termes, on trouve, pour le terme général de rang $m+1$,

$$\pm\frac{[n-(m+1)]\ldots[n-(2m-1)](n-2m)}{1.2\ldots m}p^{n-2m-1}q^m,$$

car

$$\frac{n-(2m+1)}{m}+1=\frac{n-(m+1)}{m};$$

et comme

$$(-1)^{n-1}=(-1)^{n-3},$$

le théorème est démontré.

969. Le second membre de la relation donnée est, à part D_1, ce que devient le second membre de la relation

du n° 968 quand on y fait

$$p=2, \quad q=1,$$

c'est-à-dire

$$a=1 \quad \text{et} \quad b=1.$$

Or,

$$\frac{a^n-b^n}{a-b}=\frac{D_n}{D_1}=a^{n-1}+ba^{n-2}+\ldots+b^{n-1},$$

et, par suite, dans le cas présent,

$$\frac{D_n}{D_1}=1^{n-1}+1^{n-2}+\ldots+1^{n-1}=n.$$

Le théorème est donc démontré.

Note. — Les mêmes questions ont été traitées par MM. Laclais, à Paris; Octave Espanet, du lycée de Nîmes; O. Callandreau, à Angoulême; Moret-Blanc, professeur au lycée du Havre; Cerruti Valentino, étudiant en Mathématiques, à Turin; Émile Pône, élève de Mathématiques spéciales au lycée de Besançon; Kruschwitz, étudiant en Mathématiques à Berlin.

Question 982

(voir 2e série, t. IX, p. 93).

PAR M. MORET-BLANC,
Professeur au lycée du Havre.

Soient A *et* B *deux points d'une ellipse dont* F *et* G *sont les deux foyers, les droites* FA *et* GB *se coupent au point* D *et les droites* FB *et* GA *au point* E.

Désignons respectivement par φ, γ, η et δ *les angles*

AFB, AGB, AEB, ADB.

Démontrer les relations suivantes :

$$\text{FA.FB}\sin^2\frac{\varphi}{2}=\text{GA.GB}\sin^2\frac{\gamma}{2},$$

$$\text{FA.GB.}\cos^2\frac{\delta}{2}=\text{GA.FB}\cos^2\frac{\eta}{2}.$$

(LAGUERRE.)

1° Tirons la corde AB (*). Les triangles AFB, AGB donnent

$$\overline{AB}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{FB}^2 - 2FA.FB\cos\varphi$$

$$= (FB - FA)^2 + 4FA.FB\sin^2\frac{\varphi}{2},$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{GA}^2 + \overline{GB}^2 - 2GA.GB\cos\gamma$$

$$= (GA - GB)^2 + 4GA.GB\sin^2\frac{\gamma}{2}.$$

Or, de

$$FB + GB = FA + GA,$$

on tire

$$FB - FA = GA - GB;$$

donc, il faut aussi qu'on ait

$$FA.FB\sin^2\frac{\gamma}{2} = GA.GB\sin^2\frac{\gamma}{2}.$$

2° Soit B_1 le symétrique du point B par rapport au centre.

Tirons AB_1, FB_1 et GB_1 :

$$FB_1 = GB,\quad GB_1 = FB,\quad \widehat{AFB_1} = 180^\circ - \delta,\quad \widehat{AGB_1} = 180^\circ - \eta.$$

Cela posé, les triangles AFB_1, AGB_1 donnent

$$\overline{AB_1}^2 = \overline{FA}^2 + \overline{GB}^2 + 2FA.GB\cos\delta$$

$$= (FA - GB)^2 + 4FA.GB\cos^2\frac{\delta}{2},$$

$$\overline{AB_1}^2 = \overline{GA}^2 + \overline{FB}^2 + 2GA.FB\cos\eta$$

$$= (FB - GA)^2 + 4GA.FB\cos^2\frac{\eta}{2}.$$

Or,

$$FA - GB = FB - GA;$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

donc

$$FA.GB\cos^2\frac{\delta}{2} = GA.FB\cos^2\frac{\eta}{2}.$$

Remarque. — Si l'on remplace l'ellipse par une hyperbole, les mêmes relations subsistent quand les points A et B sont pris sur la même branche; il faut changer les sinus en cosinus, et réciproquement, quand ils sont pris sur des branches différentes.

Note. — Cette question a été résolue aussi par MM. E. Kruschwitz, étudiant à Berlin; H. Lez, à Lorrez-le-Bocage; Cerruti Valentino, étudiant en Mathématiques, à Turin; F. Vivier, élève de Mathématiques spéciales au lycée de Montpellier; H. Brocard, lieutenant du Génie; Charles Bloch, du lycée Napoléon; Willière, professeur à Arlon.

Questions 1014 *et* 1016

(voir 2e série, t. X, p. 96),

PAR M. E. PELLET,
Élève à l'École Normale.

1014. *En faisant tourner, d'un même angle et dans le même sens, les génératrices d'une surface gauche autour de leur point central et dans leur plan central, on obtient une nouvelle surface gauche qui a la même ligne de striction que la première.* (G. FOURET.)

Soient G une génératrice de la première surface; M son point central et P son plan central, et G′ la génératrice correspondante de la seconde surface. Le plan P contient G′ et la tangente menée par M à la ligne de striction de la première surface, qui est aussi située sur la seconde; il est donc tangent en M à la seconde surface. Pour démontrer le théorème, il suffit donc de démontrer qu'il est normal au cône directeur de cette dernière, mené par un point de G′. Or, cela est évident, si l'on considère que ce cône s'obtient en faisant tourner les génératrices du cône directeur de la première surface d'un même angle et dans le même sens autour du sommet du cône et dans les plans normaux au cône (*).

1016. *Déterminer les sommets et les arètes d'une surface gauche ayant pour ligne de striction une courbe donnée et pour cône directeur un cône de révolution également donné.* (G. FOURET.)

Prenons pour axe des z l'axe du cône, et désignons par i l'ouverture de ce cône, par x, y, z les coordonnées d'un point quelconque de la courbe, et par α, β, γ les cosinus de la génératrice correspondante. On a

$$\gamma = \cos i \quad \text{et} \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{dx}{dy},$$

puisque le plan qui passe par la génératrice, et qui est parallèle à l'axe des z, contient la tangente à la courbe.

La relation $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ donne ensuite

$$\alpha = \pm \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} \sin i, \quad \beta = \pm \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} \sin i,$$

les mêmes signes devant être pris en même temps. Par un point (x, y, z) de la courbe passent donc deux génératrices de la surface, dont les équations sont

$$(1) \quad \begin{cases} X = \pm \dfrac{dx \tang i}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} (Z - z) + x, \\[2ex] Y = \pm \dfrac{dy \tang i}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} (Z - z) + y. \end{cases}$$

En changeant la direction positive de l'axe des z, les équations de la seconde génératrice deviennent identiques à celles de la première relativement aux anciens axes;

(*) BERTRAND, *Calcul différentiel*, p. 585.

nous pouvons donc nous borner à l'étude de celle-ci. A cet effet, nous effectuerons un changement d'axes coordonnés, nous prendrons pour axe des z' la génératrice même que nous voulons étudier, pour axe des x' la perpendiculaire à cette génératrice menée par son point central et dans son plan central, et pour axe des y' la perpendiculaire aux droites précédentes. Pour simplifier on peut supposer que, dans le premier système, le plan des xz coïncide avec le plan central; alors les formules de transformation sont

$$x = z' \sin i + x' \cos i,$$
$$z = z' \cos i - x' \sin i,$$

et les équations de la génératrice menée par le point (x, y, z) deviennent

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &X' \cos^2 i + \sin i \cos i\, Z' - x \cos i \\ &\quad = \frac{dx \sin i}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} (Z' \cos i - X' \sin i - z), \\ &Y' = \frac{dy \tang i}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} (Z' \cos i - X' \sin i - z) + y. \end{aligned}\right.$$

En général, $\frac{dy}{dx}$ est un infiniment petit du premier ordre en même temps que x et z; en réduisant chaque coefficient à sa *valeur principale*, il vient

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &X' = -\frac{\sin 2i}{4}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 Z' + (x - z \tang i)\cos i, \\ &Y' = \sin i \frac{dy}{dx} Z' + y - z\frac{dy}{dx} \tang i. \end{aligned}\right.$$

Si l'on coupe la surface par un plan perpendiculaire à l'axe des Z', on a, en se bornant aux infiniment petits du premier ordre,

$$X' = (x - z \tang i)\cos i, \quad Y' = \sin i \frac{dy}{dx} Z',$$

et la tangente à la section menée par $X' = 0$, $Y' = 0$ a pour équation

$$\frac{Y'}{X'} = \frac{\frac{dy}{dx}\operatorname{tang} i}{x - z \operatorname{tang} i} Z'.$$

Dans le cas où la courbe est un cercle, situé dans un plan perpendiculaire à l'axe du cône, la surface est un hyperboloïde de révolution, et l'on a

$$z = 0, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{a},$$

au signe près, a étant le rayon du cercle de gorge; par suite,

$$\frac{Y'}{X'} = \frac{\operatorname{tang} i}{a} Z'.$$

Si le cône se réduit à un plan, $\operatorname{tang} i$ est infini, et les équations (1) doivent être remplacées par les suivantes :

$$Z - z = 0, \quad Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x).$$

Si le plan des zx coïncide avec un des plans centraux, la génératrice correspondante coïncide avec l'axe des x; et la tangente à la courbe, intersection de la surface par un plan perpendiculaire à cette génératrice, au point où elle coupe cette génératrice, a pour équation

$$\frac{Y}{Z} = \frac{\frac{dy}{dx}}{z} X.$$

Un sommet d'une surface est un point où la surface, dans une petite étendue, est symétrique par rapport aux plans des sections principales correspondantes, aux infiniment petits du troisième ordre près.

Les sommets d'une surface réglée appartiennent à la ligne de striction. En effet, soient A un sommet, S et S′ les plans des sections principales correspondantes, M et M′ deux points de la section déterminée par S, symétriques par rapport au plan S′; P et P′ les plans tangents correspondants. Ces plans sont normaux à S, de plus P coupe la surface suivant deux droites, en ne considérant que les points voisins de M, symétriques par rapport à S; il en est de même de P′, et les droites de P′ sont symétriques de celles de P par rapport à S′. Donc ces droites font avec le plan S des angles égaux ou supplémentaires. Parmi ces droites sont évidemment comprises les génératrices en M et M′, qui, ne faisant entre elles que des angles très-petits, font avec S des angles égaux. Il résulte de là que si par un point de l'espace on mène des plans parallèles aux plans tangents aux divers points de la section déterminée par S et les génératrices correspondantes, ces plans se rencontreront suivant une droite commune, la perpendiculaire à S, et les génératrices sont symétriques deux à deux par rapport au plan tangent en A. Ce plan est donc normal au cône directeur de la surface, et par suite un plan central; le raisonnement précédent montre, en outre, que la courbe sphérique, intersection du cône directeur par une sphère concentrique, a un sommet sur la génératrice correspondante à A. Lorsque le plan tangent en A coupe la surface suivant deux droites, le plan parallèle est orthogonal au cône directeur à son entrée et à sa sortie, et la courbe sphérique a deux sommets sur les génératrices correspondantes à A; de plus, les tangentes aux sections principales sont les bissectrices de ces génératrices.

Dans le cas où le cône directeur est de révolution, on ne doit chercher les sommets de la surface qu'aux points de la ligne de striction où la tangente est perpendiculaire ou parallèle à l'axe du cône.

Si la tangente est parallèle à cet axe on a, pour les points voisins du point de contact,

$$z = s, \quad x = as^2, \quad y = bs^3;$$

par suite, les équations (3) deviennent

$$X' = -\frac{\sin 2i}{4}\frac{9b^2s^2}{4a^2}\cdot Z' + as^2 - s\sin i,$$

$$Y' = 3\sin i\frac{bs}{2a}Z' + b(1 - 3\tang i)s^3.$$

L'intersection par un plan perpendiculaire n'offre aucune particularité si Z' n'est pas nul; mais lorsque Z' est nul, on a

$$X' = -s\sin i, \quad Y' = b(1 - 3\tang i)s^3,$$

et la courbe a un point d'inflexion; le point n'est donc pas réellement un sommet, les sommets se trouvent seulement aux points où la tangente est perpendiculaire à l'axe du cône.

Lorsque $i = \frac{\pi}{2}$, on a, pour les points de la ligne de striction où la tangente est perpendiculaire au plan directeur,

$$Z' = s, \quad Y' = bs^3 + \frac{3b}{2a}s(X' - as^2),$$

et les sections de la surface par un plan passant par ces points offrent des points d'inflexion comme précédemment.

Si la tangente à la ligne de striction est parallèle au plan directeur, on a

$$Z' = as^2, \quad Y' = bs^2, \quad x = s,$$

d'où

$$Y' = bs^2 + 2bs(X' - s) = 2bsX' - bs^2.$$

L'intersection par un plan perpendiculaire à la génératrice, c'est-à-dire à l'axe des X', est une courbe tangente à l'axe des Y', pourvu que X' ne soit pas nul; de sorte que le plan des $X'Y'$, qui est normal au plan central, est tangent tout le long de la génératrice. Pour $X' = 0$, la section a un point de rebroussement à l'origine; de sorte que ce point est un point singulier de la surface.

Lorsque i est différent de $\frac{\pi}{2}$ on obtient un point analogue pour les points de la courbe de striction où la tangente est parallèle au cône directeur, c'est-à-dire pour les points de cette ligne correspondant à l'intersection du cône directeur de la surface avec le cône indicateur de la courbe, formé par les parallèles aux tangentes de la courbe. En effet, pour ces points on a

$$x - z \operatorname{tang} i = 0,$$

et les équations (2) se réduisent à

$$X' = -\frac{\sin 2i}{4}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 Z' + \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 z \sin i,$$

$$Y' = \frac{dy}{dx} \operatorname{tang} i\,(Z' \cos i - X' \sin i - z) + y,$$

$\frac{dy}{dx}$ étant infiniment petit du premier ordre avec z.

Les points que nous avons considérés n'offrent aucune singularité sur la courbe. En examinant ceux qui en offrent, on a d'autres points singuliers sur la surface. Ainsi lorsque $\frac{dy}{dx}$ est un infiniment petit d'ordre supérieur au premier, le plan central est tangent tout le long de la génératrice, si $x - z \operatorname{tang} i$ n'est pas nul.

Question 1020

(voir 2e série, t. X, p. 191) ;

PAR UN ABONNÉ.

Un point matériel décrit une ellipse sous l'action d'une force tendant vers un point fixe O. *Démontrer que la loi de la force est donnée par*

$$F = \frac{\overline{DD'}^6}{\overline{OP}^2 . \overline{PP'}^3},$$

P *désignant la position de la molécule;* PP', *la corde passant par le point* O, *et* DD' *le diamètre parallèle à cette corde.* (A. WITWORTH.)

Je considère un des cercles ayant pour projection l'ellipse proposée, et, dans le plan de ce cercle, le point o qui a pour projection le point fixe O; soient p, P', d, d' les points du cercle qui ont pour projections les points P, P', D, D' de l'ellipse, et soit f la force dont F est la projection.

Il est clair que si je démontre que la loi de la force f est donnée par

$$(1) \qquad f = \frac{\overline{dd'}^6}{\overline{op}^2 . \overline{pp'}^3},$$

la question proposée sera résolue, car je pourrai écrire

$$f.\cos\varphi = \frac{(dd' \cos\varphi)^6}{(op.\cos\varphi)^2 \, (pp'.\cos\varphi)^3},$$

et par suite

$$F = \frac{\overline{DD'}^6}{\overline{OP}^2 . \overline{PP'}^3}.$$

si φ désigne l'angle que les droites parallèles dd', op, pp' font avec le plan de l'ellipse. Toute la question est donc de démontrer la loi (1).

Soient alors R le rayon du cercle et ω l'angle que fait OP avec la perpendiculaire abaissée du point o sur la tangente au cercle en p. On sait que l'expression d'une force centrale est

$$\frac{c^2 r}{\rho\delta^3},$$

c désignant une constante, r la distance du mobile au centre d'action, ρ le rayon de courbure et δ la distance du centre d'action à la tangente. Or, ici, si je prends c^2 égal à $8R^4$, ce qui ne change pas la loi, j'ai pour cette loi

$$f = \frac{8R^4.op}{R(op.\cos\omega)^3} = \frac{(2R)^6}{\overline{op}^2.(2R\cos\omega)^3};$$

mais

$$(2R)^6 = \overline{dd'}^6,$$

$$(2R\cos\omega)^3 = \overline{pp'}^3;$$

donc la loi de la force f est donnée par

$$f = \frac{\overline{dd'}^6}{\overline{op}^2.\overline{pp'}^3},$$

C. Q. F. D.

Note. — Cette question a aussi été résolue par M. Guébhard, étudiant en médecine, à Paris.