

DOUCET

Problème de géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 10
(1871), p. 503-506

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__503_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1871, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

PROBLEME DE GEOMETRIE;

PAR M. DOUCET,

Professeur au lycée de Lyon.

Considérons deux triangles, l'un fixe ABC en grandeur et en position, l'autre $A'B'C'$ de grandeur constante et assujéti seulement à avoir ses côtés respectivement parallèles à ceux de ABC .

$C'B'$ coupe AC en un point 2 et AB en un point 5

$A'C'$ » AB » 6 » 3

$A'B'$ » BC » 4 » 1

On voit facilement que les deux triangles 1, 3, 5; 2, 4, 6 sont équivalents. Cela posé: Démontrer que la surface de 1, 3, 5 est maximum, si les deux triangles ABC , $A'B'C'$ ont leurs centres de gravité en coïncidence.

Ce théorème, dont l'énoncé est dû à M. Lemoine, se

trouve indiqué comme exercice, p. 511 du *Traité d'algèbre* de M. H. Laurent.

Je prends CB et CA pour axes des x et des y .

Soient a, b, c les trois côtés de ABC.

Les cotés de A'B'C' seront $a\theta, b\theta, c\theta$,

θ étant positif, si l'homothétie est directe, négatif dans le cas contraire.

Soient x et y les coordonnées de C'. On a immédiatement, pour les coordonnées des points 1, 2, 3, 4, 5, 6,

	x	y
(1)	0	$b\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \theta\right)$
(2)	0	y
(3)	x	0
(4)	$a\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \theta\right)$	0
(5)	$a\left(1 - \frac{y}{b}\right)$	y
(6)	x	$b\left(1 - \frac{x}{a}\right)$.

La surface 1, 3, 5 a pour expression le déterminant

$$\pm \frac{1}{2} \sin C \begin{vmatrix} 1 & 0 & b\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \theta\right) \\ 1 & x & 0 \\ 1 & a\left(1 - \frac{y}{b}\right) & y \end{vmatrix},$$

ou, en développant d'après la règle de Sarrus,

$$\pm \frac{1}{2} \sin C \left[xy - ab \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \theta \right) \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 \right) \right].$$

On trouve la même expression pour l'aire 2, 4, 6.

Déterminons le signe à adopter dans chaque cas.

Considérons l'ellipse

$$f(xy) = xy - ab \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \theta \right) \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{a} - 1 \right) = 0.$$

Elle coupe l'axe des x en B et en un point B'' dont l'abscisse est $-a\theta$.

Elle coupe l'axe des y en A et en un point A'' dont l'ordonnée est $-b\theta$.

Ces valeurs montrent que

si $\theta > 0$, C est intérieur à cette ellipse,

et que

si $\theta < 0$, C est extérieur à cette ellipse.

Or, pour $x = y = 0$, on a

$$f(x, y) = ab\theta.$$

Donc, si x et y sont les coordonnées d'un point intérieur à cette ellipse, on aura

$$f(x, y) > 0,$$

et, si x et y sont les coordonnées d'un point extérieur, on aura

$$f(x, y) < 0.$$

Dans le premier cas, il faut adopter le signe +, dans le second, le signe —, pour avoir la surface 1, 3, 5 en valeur absolue.

Nous voyons en même temps que la surface 1, 3, 5 varie avec x et y proportionnellement au z du paraboloïde elliptique

$$z = xy - ab \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \theta \right) \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 \right),$$

lequel z a un maximum pour les valeurs de x et y correspondant au centre C₁ de l'ellipse $f(x, y) = 0$.

On a pour C_1

$$x = \frac{a}{3}(1 - \theta),$$

$$y = \frac{b}{3}(1 - \theta).$$

Le centre de gravité du triangle $A'B'C'$ dans la position A, B_1, C_1 a donc pour coordonnées

$$x = \frac{a}{3}(1 - \theta) + \frac{a}{3}\theta = \frac{a}{3},$$

$$y = \frac{b}{3}(1 - \theta) + \frac{b}{3}\theta = \frac{b}{3},$$

et coïncide, par conséquent, avec celui du triangle ABC .

Remarque I.—La surface maximum est $\frac{S}{3}(1 + \theta + \theta^2)$, S désignant l'aire du triangle ABC .

Remarque II.—Si C' se meut sur l'ellipse $f(x, y) = 0$, les trois points 1, 3, 5 ainsi que 2, 4, 6, sont en ligne droite.

Remarque III.—Si C' se meut sur l'ellipse $f(x, y) = K$, K étant constant, la surface 1, 3, 5 reste constante.
