

L. SANCERY

**Note sur le quadrilatère inscrit dont les diagonales sont rectangulaires**

*Nouvelles annales de mathématiques 2<sup>e</sup> série*, tome 10 (1871), p. 487-497

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1871\\_2\\_10\\_\\_487\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__487_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1871, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**NOTE SUR LE QUADRILATÈRE INSCRIT DONT LES DIAGONALES  
SONT RECTANGULAIRES ;**

PAR M. L. SANCERY, à Nice.

---

La question qui a été proposée pour le concours général de Mathématiques élémentaires en 1870 (voir *Nou-*

velles *Annales*, t. IX, p. 383) portait sur les propriétés du quadrilatère inscrit dont les diagonales sont rectangulaires. Ces propriétés sont assez nombreuses, et il en est qu'on rencontre dans les œuvres d'Archimède. Parmi celles dont le concours exigeait la démonstration, plusieurs se trouvant exposées dans certains ouvrages élémentaires fort répandus, on peut croire que la partie la plus essentielle de la question consistait à trouver le lieu géométrique des sommets du quadrilatère circonscrit. C'est ce lieu que nous allons établir à l'aide de la seule Géométrie. Nous développerons ensuite un autre lieu lié au précédent, et nous ajouterons les énoncés d'un assez grand nombre de propriétés.

La figure que nous avons à considérer, comportant un très-grand nombre de points, le lecteur est prié de la construire d'après les indications suivantes.

Le rayon  $r$  de la circonférence donnée  $O$  a une longueur de 45 millimètres; le point  $P$ , autour duquel on fait tourner les diagonales rectangulaires, est situé à droite, sur le rayon horizontal, à une distance du centre égale à 24 millimètres. La première diagonale  $AC$ , passant par  $P$ , fait un angle  $\varphi$  de 13 degrés avec le prolongement de  $OP$  et au-dessus de ce prolongement. Des points  $A$  et  $C$ ,  $A$  est le plus éloigné de  $P$  et se trouve au-dessous du diamètre horizontal. Le quadrilatère inscrit est  $ABCD$ , le quadrilatère circonscrit, formé par les tangentes menées par les sommets du premier, est  $A'B'C'D'$ ,  $A'$  étant l'intersection de tangentes en  $A$  et  $B$ . Les lettres se succèdent dans le parcours des quadrilatères de gauche à droite;  $AB$  et  $DC$  se coupent en  $K$ ,  $BC$  et  $AD$  en  $L$ ,  $A'B'$  et  $D'C'$  en  $M$ ,  $B'C'$  et  $A'D'$  en  $N$ .

1. Les diagonales  $A'C'$ ,  $B'D'$  du quadrilatère circonscrit se coupent en  $P$  et passent respectivement par les

points K, L, intersections des côtés opposés du quadrilatère inscrit. Les points K, L, M, N sont sur la polaire de P par rapport au cercle O. Le quadrilatère A'B'C'D' est inscriptible dans une circonférence O', et la polaire du point P, par rapport à cette circonférence, est encore la droite KLMN; d'où il suit que le centre O' est sur la ligne OP. Ce sont ces propriétés auxquelles nous faisons allusion en commençant.

2. Pour démontrer que les sommets du quadrilatère variable A'B'C'D' sont toujours sur la même circonférence, nous chercherons la valeur du produit A'P.PC'. Nous obtiendrons ainsi une première relation entre le rayon R du cercle circonscrit et la distance O'P ou D. Nous exprimerons ensuite que la droite KLMN est la polaire du point P par rapport aux deux circonférences O et O'. Nous aurons ainsi une seconde relation entre R et D. De ces deux relations résultera naturellement la démonstration.

En abaissant PI, OG, OF perpendiculaires sur A'B', BD, AC, on a, par le triangle A'PB,

$$A'P^2 = A'B^2 + BP^2 + 2 A'B \cdot BI,$$

puis, par les triangles rectangles semblables A'OB, BPC,

$$A'B = r \frac{PB}{PC},$$

et enfin, par les triangles rectangles semblables PBI, OBG,

$$BI = \frac{OG \cdot PB}{r}.$$

Il suit de là

$$A'P^2 = \frac{BP^2}{PC^2} (r^2 + PC^2 + 2 OG \cdot PC);$$

( 490 )

mais le triangle OPC donne

$$r^2 = PC^2 + d^2 + 2 PC \cdot FP;$$

par conséquent, si l'on observe que  $FP = OG$ , et si l'on remplace  $PC^2 + 2 OG \cdot PC$  par  $r^2 - d^2$ , on obtiendra

$$A'P^2 = \frac{BP^2}{PC^2} (2r^2 - d^2).$$

Par analogie on a aussi

$$PC'^2 = \frac{PC^2}{BP^2} (2r^2 - d^2).$$

De ces deux relations on déduit

$$A'P \cdot PC' = 2r^2 - d^2;$$

or, dans le cercle  $O'$  on a immédiatement

$$A'P \cdot PC' = R^2 - D^2;$$

par conséquent,

$$R^2 - D^2 = 2r^2 - d^2.$$

Soient  $Q$  le point d'intersection des droites  $OP$ ,  $KL$ , et  $p$ ,  $P$  les distances  $OQ$ ,  $O'Q$ , on a

$$d \cdot p = r^2, \quad D \cdot P = R^2,$$

d'où

$$p = \frac{r^2}{d}, \quad PQ = \frac{r^2 - d^2}{d} = \frac{R^2 - D^2}{D}.$$

Si l'on remplace  $R^2 - D^2$  par  $2r^2 - d^2$ , la dernière relation devient

$$\frac{r^2 - d^2}{d} = \frac{2r^2 - d^2}{D},$$

on en tire

$$\frac{r^2 - d^2}{d} = \frac{r^2}{D - d} \quad \text{ou} \quad OO' = \frac{dr'}{r^2 - d^2}.$$

Par suite, si, dans la relation

$$R^2 = (OO' + d)(OO + p)$$

on remplace  $OO'$  et  $p$  par leurs valeurs, on trouve

$$R^2 = \frac{r^4(2r^2 - d^2)}{(r^2 - d^2)^2}.$$

Les valeurs de  $OO'$  et de  $R$ , étant constantes, montrent que, lorsqu'on fait tourner autour du point  $P$  les cordes rectangulaires  $AC$ ,  $BD$ , le quadrilatère  $A'B'C'D'$  reste toujours inscrit dans la même circonférence.

3. Étant donné le quadriatère variable  $ABCD$ , dont les diagonales rectangulaires passent par le point fixe  $P$ , on abaisse des perpendiculaires de ce point sur les quatre côtés, et l'on prend les milieux de ces côtés. Trouver le lieu des pieds des perpendiculaires et des points milieux.

Soient  $P\alpha'$ ,  $P\beta'$ ,  $P\gamma'$ ,  $P\delta'$  les perpendiculaires abaissées du point  $P$  respectivement sur  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$ . Prolongeons ces droites jusqu'à ce qu'elles rencontrent les côtés  $CD$ ,  $DA$ ,  $AB$ ,  $BC$  en  $m''$ ,  $m'''$ ,  $m$ ,  $m'$ . Dans le triangle rectangle  $CPD$ , les angles  $CP\gamma'$ ,  $CDP$  sont égaux entre eux; mais  $CDP = CAB$  comme ayant la même mesure, donc  $CP\gamma' = CAB$ ; d'ailleurs,  $CP\gamma' = APm$ , par conséquent  $CAB = APm$ . Le triangle  $AmP$  ayant deux angles égaux est donc isocèle, et  $mA = mP$ . Si du point  $m$  comme centre avec  $mA$  pour rayon on décrit une circonférence, elle passera d'abord par les points  $A$ ,  $P$ , puis par le point  $B$ , puisque l'angle  $APB$  est droit, autrement dit  $m$  est le milieu de  $AB$ . Ainsi, le prolongement de la perpendiculaire  $P\gamma'$  sur  $CD$  passe par le milieu  $m$  du côté opposé à  $CD$  dans le quadrilatère  $ABCD$ .

Si l'on joint les points milieux, la figure  $mm'm''m'''$  sera un rectangle, puisque ses côtés sont respectivement

parallèles aux droites AC, BD. Les diagonales  $mm''$ ,  $m'm'''$  sont donc égales, et si de leur intersection  $\omega$  avec  $\omega m$  pour rayon on décrit une circonférence, elle passera par les points  $m$ ,  $m'$ ,  $m''$ ,  $m'''$ , et aussi par les points  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$ ,  $\delta'$ , puisque les angles  $m\alpha'm''$ ,  $m\gamma'm''$ ,  $m'\beta'm'''$ ,  $m'\delta'm'''$  sont droits. Par là on voit que les projections du point P sur les côtés et les milieux de ces côtés sont sur une même circonférence.

Joignons maintenant  $m''O$ ; la figure  $PmOm''$  est un parallélogramme, car  $Om$  et  $Pm''$  sont parallèles comme perpendiculaires à AB;  $Pm$  et  $Om''$  le sont aussi comme perpendiculaires à CD. Il en résulte, les diagonales se coupant en parties égales, que le milieu  $\omega$  de  $mm''$  est aussi le milieu de OP. Le centre de la circonférence  $m\alpha'm'\beta'\gamma'm''\delta'm'''$  est donc invariable.

Évaluons son diamètre  $mm''$ , que nous désignerons par  $2\rho$ . Le triangle rectangle  $mm'm''$  donne

$$mm''^2 = mm'^2 + m'm''^2 = \frac{AC^2 + BD^2}{4};$$

or

$$AC^2 + BD^2 = 8r^2 - 4d^2;$$

par conséquent,

$$4\rho^2 = 2r^2 - d^2.$$

Le diamètre est donc constant. Ainsi le lieu demandé est une circonférence ayant pour centre le milieu  $\omega$  de OP et pour rayon

$$\rho = \frac{\sqrt{2r^2 - d^2}}{2}.$$

*Remarque.* — On a trouvé  $Om = Pm'' = \frac{DC}{2}$ ; ainsi, dans le quadrilatère ABCD, la distance d'un côté au centre est égale à la moitié du côté opposé.

4. Les rayons des deux cercles  $O'$ ,  $\omega$  étant respectivement fournis par les formules

$$R^2 = \frac{r^4(2r^2 - d^2)}{(r^2 - d^2)^2}, \quad 4\rho^2 = 2r^2 - d^2,$$

on obtient par la division

$$\frac{R}{2\rho} = \frac{r^2}{r^2 - d^2};$$

mais on a trouvé

$$OO' = \frac{dr^2}{r^2 - d^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{OO'}{OP} = \frac{r^2}{r^2 - d^2},$$

d'ailleurs  $OP = 2O\omega$ , donc

$$\frac{R}{\rho} = \frac{O'O}{O\omega} = \frac{2r^2}{r^2 - d^2}.$$

Il suit de là que les deux courbes  $O'$ ,  $\omega$  ont pour centre de similitude inverse le centre de la circonférence donnée et que le rapport de similitude est  $\frac{2r^2}{r^2 - d^2}$ . Il est évident que la polaire du point P par rapport au cercle  $\omega$  est encore la droite KL.

5. Si l'on prolonge la ligne  $A'O$  jusqu'à son intersection  $A_1$  avec la circonférence  $\omega$ , ce point sera l'antihomologue de  $A'$ , mais si l'on mène le diamètre du cercle  $\omega$  qui passe par  $A_1$ , son autre extrémité sera l'homologue directe de  $A'$ ; or, l'angle  $A_1m\alpha'$  étant droit, ce diamètre passe par  $\alpha'$ ; ainsi  $\alpha'$  est l'homologue direct de  $A'$ .

Les points  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$ ,  $\delta'$  étant les homologues respectifs de  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$ , il en résulte que le quadrilatère  $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$  est homothétique direct avec  $A'B'C'D'$ . La ligne  $A'\alpha'$



coupant  $O'\omega$  en  $S$ , ce point sera le centre de similitude direct des deux cercles  $O'$ ,  $\omega$  et l'on aura

$$\frac{SO'}{S\omega} = \frac{OO'}{O\omega} = \frac{2r^2}{r^2 - d^2}.$$

6. Le quadrilatère  $A'B'C'D'$  étant inscriptible, et circonscriptible, son semblable  $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$  jouit de la même propriété. Il est donc circonscriptible à un cercle dont on obtiendra le centre en cherchant l'homologue de  $O$  par rapport à  $S$ . Or, les points  $A'$ ,  $\alpha'$  étant homologues, il suffira, pour obtenir ce centre, de mener par  $\alpha'$  une parallèle à  $A'O$  et de déterminer son intersection avec  $SO$ ; mais  $\alpha'P$  est justement parallèle à  $A'O$ ; le point  $P$  est donc le centre de cette circonférence. Si l'on mène  $BS$ , elle coupera  $\alpha'\beta'$  au point de contact  $b$ . En joignant les points de contact  $a, b, c, d$ , on obtiendra un quadrilatère  $abcd$  qui sera homothétique direct de  $ABCD$ . Le rayon  $\rho_1$  de la dernière circonférence s'obtiendra par la proportion

$$\frac{\rho_1}{r} = \frac{r^2 - d^2}{2r^2}, \quad \text{d'où} \quad \rho_1 = \frac{r^2 - d^2}{2r}.$$

Les diagonales  $\alpha'\gamma'$ ,  $\beta'\delta'$  se couperont en un point  $P'$ , qui, étant l'homologue de  $P$  par rapport à  $S$ , sera fixe comme le point  $P$ .

7. Les résultats précédents peuvent être ainsi résumés :

*Étant donné un quadrilatère variable inscrit dans une circonférence et dont les diagonales rectangulaires se coupent toujours en un point fixe  $P$ , si l'on projette ce point fixe sur les quatre côtés, les projections obtenues seront les sommets d'un quadrilatère variable toujours inscriptible dans la même circonférence, dont les diagonales passeront toujours par un point fixe, et*

dont les côtés seront toujours tangents à une même circonférence ayant le point P pour centre.

Il est visible en outre que, puisque aux quadrilatères  $A'B'C'D'$ , ABCD correspondent les deux quadrilatères  $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ ,  $abcd$ , à ces deux derniers en correspondront deux autres, et ainsi de suite indéfiniment. Tous ces quadrilatères auront le point S pour centre de similitude direct.

8. Voici maintenant un tableau de quelques propriétés du système des deux quadrilatères ABCD,  $A'B'C'D'$ .

Soient  $\alpha$ ,  $\beta$  les angles DAB, ABC dont les valeurs sont fournies par les relations

$$\cos \alpha = \frac{d \cos \varphi}{r}, \quad \cos \beta = \frac{d \sin \varphi}{r},$$

où  $\varphi$  désigne l'angle OPA. On a

1°

$$\begin{aligned} \text{AKD} &= \beta - \alpha - \alpha' P m, \\ \text{ALB} &= 180^\circ - (\alpha + \beta) = \beta' P m', \\ \text{A'MD}' &= \text{ALB} + \text{AKB}, \\ \text{A'NB}' &= \text{ALB} - \text{AKB}; \end{aligned}$$

2°

$$\begin{aligned} \text{ABD} &= 45^\circ + \frac{\beta - \alpha}{2} = \text{ACD}, \\ \text{BAC} &= 45^\circ - \frac{\beta - \alpha}{2} = \text{BDC}, \\ \text{DBC} &= \frac{\alpha + \beta}{2} - 45^\circ = \text{CAD}, \\ \text{BCA} &= 135^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2} = \text{BDA}; \end{aligned}$$

3°

$$\begin{aligned} \text{A}' &= \alpha + \beta - 90^\circ, & \text{C}' &= 270 - (\alpha + \beta), \\ \text{B}' &= 90^\circ + \beta - \alpha, & \text{D}' &= 90^\circ - (\beta - \alpha); \end{aligned}$$

4°

$$\begin{aligned} A' + L &= 90^\circ, & D' + K &= 90^\circ, \\ CC'D - L &= 90^\circ, & BB'C - K &= 90^\circ; \end{aligned}$$

5°

$$\begin{aligned} Pm^2 + Pm'^2 + Pm''^2 + Pm'''^2 &= 2r^2, \\ P\alpha' \cdot P\beta', P\gamma' \cdot P\delta' &= \frac{(r^2 - d^2)^2}{4r^2}, \\ Om \cdot Om' \cdot Om'' \cdot Om''' &= \frac{r^2}{4}(r^2 - d^2), \\ \sin A' \cdot \sin B' &= \frac{r^2 - d^2}{r^2}, \end{aligned}$$

ou

$$\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = \frac{d^2 - r^2}{r^2};$$

6°

$$\begin{aligned} A'B &= r \frac{PA}{PD}, & A'B' &= r \frac{AC}{PD}, \\ A'A \cdot C'D &= r^2, & A'A \cdot A'D &= r^2 \frac{AP}{PC}, \\ \frac{AA'}{AD'} &= \frac{PB}{PD}; \end{aligned}$$

7° Les diagonales du quadrilatère ABCD sont les bissectrices des angles des diagonales du quadrilatère A'B'C'D' :

$$\frac{PA'}{PD'} = \frac{PB}{PD}, \quad \frac{A'A}{AD'} = \frac{BP}{PD};$$

8° S étant la surface du quadrilatère ABCD,

$$\begin{aligned} A'C' + B'D' &= S \frac{2\sqrt{2r^2 - d^2}}{r^2 - d^2}, \\ A'C' \cdot B'D' &= \frac{4r^2(2r^2 - d^2)}{r^2 - d^2}; \end{aligned}$$

9°

$$\frac{AA'}{A'P} = \frac{r}{\sqrt{2r^2 - d^2}},$$

$$\text{tang } \frac{A'PD'}{2} = \frac{AC}{BD}, \quad \sin A'PD' = \frac{S}{2r^2 - d^2},$$

$$\frac{\sin PA'B}{\sin PA'A} = \frac{\text{tr. BCD}}{\text{tr. ADC}};$$

10°  $S'$ ,  $\sigma$ ,  $\sigma'$  étant les surfaces des quadrilatères  $A'B'C'D'$ ,  $mm'm''m'''$ ,  $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ ,

$$\frac{S'}{S} = \frac{2r^2}{r^2 - d^2}, \quad \frac{\sigma'}{S} = \frac{2r^2}{r^2 - d^2},$$

$$\frac{S'}{S} = \frac{S}{\sigma'}, \quad \frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{r^2}{r^2 - d^2}.$$


---