

L. PAINVIN

Théorème sur les surfaces

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 10
(1871), p. 481-487

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__481_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1871, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

THÉORÈME SUR LES SURFACES ;

PAR M. L. PAINVIN.

1. J'énoncerai d'abord la proposition que je veux établir :

1° Soient donnés trois points fixes A, B, C et une surface fixe Σ du $m^{\text{ième}}$ ordre; on imagine un point M se déplaçant sur la surface Σ , puis, avec trois autres points fixes A', B', C' donnés dans l'espace, on construit une pyramide $A'B'C'S$ telle qu'on ait toujours, quelle que soit la position du point M sur la surface Σ ,

$$SA' = MA, \quad SB' = MB, \quad SC' = MC;$$

le point S décrira une surface (S) d'ordre $4m$ en général; l'ordre se réduira à $2m$ si la surface directrice Σ est symétrique par rapport au plan ABC .

2° Prenons maintenant sur MA, MB, MC des longueurs MA_1, MB_1, MC_1 telles que leur résultante soit dirigée suivant la normale en M à la surface Σ ; si l'on porte alors sur SA', SB', SC' des longueurs SA'_1, SB'_1, SC'_1 respectivement égales à MA_1, MB_1, MC_1 , la résultante des trois lignes SA'_1, SB'_1, SC'_1 sera normale en S à la surface (S) .

Je n'ai pas besoin d'ajouter qu'on a un théorème analogue pour les courbes.

2. Nous prendrons pour plan des xy le plan des trois points A, B, C ; soient alors

$$\alpha, \beta, 0; \quad \alpha_1, \beta_1, 0; \quad \alpha_2, \beta_2, 0$$

les coordonnées respectives des points A, B, C; puis

$$a, b, c; \quad a_1, b_1, c_1; \quad a_2, b_2, c_2$$

celles des points A', B', C'; désignons enfin par λ, μ, ν les coordonnées du point M, et par x, y, z celles du point S, et posons

$$(1) \quad \begin{cases} r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2, \\ r_1^2 = (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2, \\ r_2^2 = (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 + (z - c_2)^2; \end{cases}$$

d'après les conditions imposées, on aura

$$(2) \quad \begin{cases} (\lambda - \alpha)^2 + (\mu - \beta)^2 + \nu^2 = r^2, \\ (\lambda - \alpha_1)^2 + (\mu - \beta_1)^2 + \nu^2 = r_1^2, \\ (\lambda - \alpha_2)^2 + (\mu - \beta_2)^2 + \nu^2 = r_2^2, \end{cases}$$

$$(3) \quad F(\lambda, \mu, \nu) = 0,$$

en supposant que $F(x, y, z) = 0$ est l'équation de la surface directrice Σ .

Si l'on élimine λ, μ, ν entre les quatre équations (2) et (3), on aura un résultat de la forme

$$(4) \quad \varphi(r, r_1, r_2) = 0,$$

qui sera l'équation de la surface engendrée (S), en y supposant r, r_1, r_2 remplacés par leurs valeurs (1).

Remarque. — Si l'on remplace, dans l'équation (4), r, r_1, r_2 par les valeurs (2), on aura une identité, pourvu qu'on tienne compte de la relation (3); en d'autres termes, si, après cette substitution, on élimine ν , par exemple, entre les équations (3) et (4), on aura une *identité* en λ et μ ; cette remarque nous sera utile plus loin.

3. Cherchons d'abord le degré de l'équation (4).

En ajoutant les équations (2), on trouve

$$3(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) - 2\lambda(\alpha + \alpha_1 + \alpha_2) - 2\mu(\beta + \beta_1 + \beta_2) \\ + \alpha^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 = r^2 + r_1^2 + r_2^2;$$

d'après cela, on pourra substituer au système (2) un système formé de l'équation précédente et de deux équations de la forme

$$l\lambda + m\mu = Ar^2 + A_1r_1^2 + A_2r_2^2 + A_3, \\ l_1\lambda + m_1\mu = Br^2 + B_1r_1^2 + B_2r_2^2 + B_3;$$

de là on déduit

$$\lambda = Lr^2 + L_1r_1^2 + L_2r_2^2 + L_3, \\ \mu = Mr^2 + M_1r_1^2 + M_2r_2^2 + M_3, \\ \nu^2 = Nr^4 + N_1r_1^4 + N_2r_2^4 + N'r_1^2r_2^2 + N''r^2r_2^2 + N'''r_1^2r_2^2 \\ + Pr^2 + P_1r_1^2 + P_2r_2^2 + P_3,$$

$L, L_1, L_2, \dots, N, \dots, N', \dots, P, \dots$ étant des constantes.

Il est maintenant facile de constater que la substitution de ces dernières valeurs dans l'équation $F(\lambda, \mu, \nu) = 0$ donnera un résultat du degré $4m$ ou du degré $2m$ en x, y, z , suivant que cette équation renfermera ou ne renfermera pas de puissances impaires de ν , c'est-à-dire suivant que la surface Σ ne sera pas ou sera symétrique par rapport au plan ABC.

4. Démontrons maintenant la propriété relative aux normales.

D'après la remarque faite au n° 2, les dérivées, par rapport à λ et μ , du premier membre de l'équation (4) doivent être identiquement nulles, si l'on y regarde r, r_1, r_2 comme ayant les valeurs (2), et si l'on y considère ν comme une fonction de λ et μ définie par l'équation (3);

on a donc, d'après cela,

$$\frac{d\varphi}{dr} \frac{dr}{d\lambda} + \frac{d\varphi}{dr_1} \frac{dr_1}{d\lambda} + \frac{d\varphi}{dr_2} \frac{dr_2}{d\lambda} + \left(\frac{d\varphi}{dr} \frac{dr}{d\nu} + \frac{d\varphi}{dr_1} \frac{dr_1}{d\nu} + \frac{d\varphi}{dr_2} \frac{dr_2}{d\nu} \right) \frac{d\nu}{d\lambda} = 0,$$

$$\frac{d\varphi}{dr} \frac{dr}{d\mu} + \frac{d\varphi}{dr_1} \frac{dr_1}{d\mu} + \frac{d\varphi}{dr_2} \frac{dr_2}{d\mu} + \left(\frac{d\varphi}{dr} \frac{dr}{d\nu} + \frac{d\varphi}{dr_1} \frac{dr_1}{d\nu} + \frac{d\varphi}{dr_2} \frac{dr_2}{d\nu} \right) \frac{d\nu}{d\mu} = 0;$$

mais les équations (2) nous donnent

$$\frac{dr}{d\lambda} = \frac{\lambda - \alpha}{r}, \quad \frac{dr}{d\mu} = \frac{\mu - \beta}{r}, \quad \frac{dr}{d\nu} = \frac{\nu}{r}, \dots;$$

et, d'après l'équation (3), il vient

$$\frac{dF}{d\lambda} + \frac{dF}{d\nu} \frac{d\nu}{d\lambda} = 0, \quad \frac{dF}{d\mu} + \frac{dF}{d\nu} \frac{d\nu}{d\mu} = 0;$$

on a donc les relations

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\varphi}{dr} \frac{\lambda - \alpha}{r} + \frac{d\varphi}{dr_1} \frac{\lambda - \alpha_1}{r_1} + \frac{d\varphi}{dr_2} \frac{\lambda - \alpha_2}{r_2} = K \frac{dF}{d\lambda}, \\ \frac{d\varphi}{dr} \frac{\mu - \beta}{r} + \frac{d\varphi}{dr_1} \frac{\mu - \beta_1}{r_1} + \frac{d\varphi}{dr_2} \frac{\mu - \beta_2}{r_2} = K \frac{dF}{d\mu}, \\ \frac{d\varphi}{dr} \frac{\nu}{r} + \frac{d\varphi}{dr_1} \frac{\nu}{r_1} + \frac{d\varphi}{dr_2} \frac{\nu}{r_2} = K \frac{dF}{d\nu}. \end{array} \right.$$

Si maintenant nous portons sur MA, MB, MC des longueurs \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} , les projections de la résultante de ces longueurs sur les axes Ox , Oy , Oz de coordonnées seront

$$A \frac{\lambda - \alpha}{r} + B \frac{\lambda - \alpha_1}{r_1} + C \frac{\lambda - \alpha_2}{r_2},$$

$$A \frac{\mu - \beta}{r} + B \frac{\mu - \beta_1}{r_1} + C \frac{\mu - \beta_2}{r_2},$$

$$A \frac{\nu}{r} + B \frac{\nu}{r_1} + C \frac{\nu}{r_2},$$

puisque les longueurs MA, MB, MC sont respectivement égales, d'après les hypothèses, à r, r_1, r_2 . Mais si, d'un autre côté, la résultante des longueurs $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ doit coïncider avec la normale au point (λ, μ, ν) à la surface Σ , $F(\lambda, \mu, \nu) = 0$, on aura

$$(6) \quad \begin{cases} A \frac{\lambda - \alpha}{r} + B \frac{\lambda - \alpha_1}{r_1} + C \frac{\lambda - \alpha_2}{r_2} = K' \frac{dF}{d\lambda}, \\ A \frac{\mu - \beta}{r} + B \frac{\mu - \beta_1}{r_1} + C \frac{\mu - \beta_2}{r_2} = K' \frac{dF}{d\mu}, \\ A \frac{\nu}{r} + B \frac{\nu}{r_1} + C \frac{\nu}{r_2} = K' \frac{dF}{d\nu}. \end{cases}$$

L'élimination de $\frac{dF}{d\lambda}, \frac{dF}{d\mu}, \frac{dF}{d\nu}$, entre les équations (5) et (6), conduit à

$$\begin{aligned} & A \frac{\lambda - \alpha}{r} + B \frac{\lambda - \alpha_1}{r_1} + C \frac{\lambda - \alpha_2}{r_2} \\ & = K'' \left(\frac{d\varphi}{dr} \frac{\lambda - \alpha}{r} + \frac{d\varphi}{dr_1} \frac{\lambda - \alpha_1}{r_1} + \frac{d\varphi}{dr_2} \frac{\lambda - \alpha_2}{r_2} \right), \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

équations qu'on peut écrire

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left(A - K'' \frac{d\varphi}{dr} \right) \frac{\lambda - \alpha}{r} + \left(B - K'' \frac{d\varphi}{dr_1} \right) \frac{\lambda - \alpha_1}{r_1} \\ & \quad + \left(C - K'' \frac{d\varphi}{dr_2} \right) \frac{\lambda - \alpha_2}{r_2} = 0, \\ & \left(A - K'' \frac{d\varphi}{dr} \right) \frac{\mu - \beta}{r} + \left(B - K'' \frac{d\varphi}{dr_1} \right) \frac{\mu - \beta_1}{r_1} \\ & \quad + \left(C - K'' \frac{d\varphi}{dr_2} \right) \frac{\mu - \beta_2}{r_2} = 0, \\ & \left(A - K'' \frac{d\varphi}{dr} \right) \frac{1}{r} + \left(B - K'' \frac{d\varphi}{dr_1} \right) \frac{1}{r_1} \\ & \quad + \left(C - K'' \frac{d\varphi}{dr_2} \right) \frac{1}{r_2} = 0. \end{aligned} \right.$$

Or le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{\lambda - \alpha}{r} & \frac{\lambda - \alpha_1}{r_1} & \frac{\lambda - \alpha_2}{r_2} \\ \frac{\mu - \beta}{r} & \frac{\mu - \beta_1}{r_1} & \frac{\mu - \beta_2}{r_2} \\ \frac{1}{r} & \frac{1}{r_1} & \frac{1}{r_2} \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} \lambda - \alpha & \lambda - \alpha_1 & \lambda - \alpha_2 \\ \mu - \beta & \mu - \beta_1 & \mu - \beta_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

n'est pas nul, puisqu'il représente le double de la surface du triangle ABC; il résulte donc des équations (7) :

$$(8) \quad A = K'' \frac{d\varphi}{dr}, \quad B = K'' \frac{d\varphi}{dr_1}, \quad C = K'' \frac{d\varphi}{dr_2}.$$

5. Ceci établi, portons les longueurs \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} sur SA' , SB' , SC' ; les projections de la résultante sur Ox , Oy , Oz seront respectivement

$$\begin{aligned} A \frac{x-a}{r} + B \frac{x-a_1}{r_1} + C \frac{x-a_2}{r_2}, \\ A \frac{y-b}{r} + B \frac{y-b_1}{r_1} + C \frac{y-b_2}{r_2}, \\ A \frac{z-c}{r} + B \frac{z-c_1}{r_1} + C \frac{z-c_2}{r_2}; \end{aligned}$$

ou, d'après les valeurs (8),

$$\begin{aligned} K'' \left(\frac{d\varphi}{dr} \frac{x-a}{r} + \frac{d\varphi}{dr_1} \frac{x-a_1}{r_1} + \frac{d\varphi}{dr_2} \frac{x-a_2}{r_2} \right), \\ K'' \left(\frac{d\varphi}{dr} \frac{y-b}{r} + \frac{d\varphi}{dr_1} \frac{y-b_1}{r_1} + \frac{d\varphi}{dr_2} \frac{y-b_2}{r_2} \right), \\ K'' \left(\frac{d\varphi}{dr} \frac{z-c}{r} + \frac{d\varphi}{dr_1} \frac{z-c_1}{r_1} + \frac{d\varphi}{dr_2} \frac{z-c_2}{r_2} \right), \end{aligned}$$

ou enfin

$$(9) \quad K'' \frac{d\varphi}{dx}, \quad K'' \frac{d\varphi}{dy}, \quad K'' \frac{d\varphi}{dz}.$$

Mais ces dernières valeurs sont précisément proportionnelles aux cosinus des angles, avec les axes, de la normale en $S(x, y, z)$ à la surface (4); la résultante de SA' , SB' , SC' , est donc dirigée suivant cette normale. c. q. f. d.

6. Le théorème général que je viens d'établir renferme, comme cas particulier, le suivant :

1° *Étant donnés trois points fixes A, B, C, et trois autres points A', B', C' dans l'espace; si l'on considère un point quelconque M dans le plan ABC, et qu'on construise une pyramide A'B'C'S telle qu'on ait toujours, quel que soit le point M,*

$$SA' = MA, \quad SB' = MB, \quad SC' = MC;$$

le point S engendrera une surface du second ordre.

2° *Si l'on prend sur MA, MB, MC des longueurs MA_1, MB_1, MC_1 telles que les trois forces, ayant pour intensités ces longueurs, soient en équilibre, et qu'on porte sur SA', SB', SC' , à partir du point S, des longueurs SA'_1, SB'_1, SC'_1 , respectivement égales à MA_1, MB_1, MC_1 ; la résultante des forces SA'_1, SB'_1, SC'_1 sera normale en S' à la surface engendrée.*

La première partie de ce théorème particulier est due à Jacobi, la seconde à Joachimsthal (voir le *Journal de Borchardt*, t. LXXIII, p. 180 et 207).