

W.-H. BESANT

Exercices pour la licence

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 10
(1871), p. 474-477

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__474_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1871, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

EXERCICES POUR LA LICENCE

(suite, voir même tome, p 332),

PAR M. W.-H. BESANT,

du college de Saint-Jean à Cambridge.

13. La roulette, sur une ligne droite, du pôle d'une spirale hyperbolique $r\theta = c$, est

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{c^2 - y^2}};$$

et le pôle de la courbe $c^n p = r^{n+1}$ est

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^{n+1} = \left(\frac{c}{y}\right)^n.$$

14. Une courbe roule symétriquement sur une courbe égale, entraînant une développante. L'enveloppe de cette dernière courbe est une développante de la courbe fixe.

15. Si une courbe roule sur une ligne droite, la cour-

bure de la roulette d'un point varie comme $\frac{d}{dp} \left(\frac{\rho}{r} \right)$, ρ et r étant rapportés à ce point.

Si la courbe est

$$\frac{a}{r} = 1 + \sec \alpha \sin(\theta \sin \alpha),$$

la roulette est un cercle.

16. La courbe $P'Q$ roule sur la courbe PQ , P' passant par P ; la roulette de P' est, dans le voisinage de P , une parabole semi-cubique dont le paramètre est $\frac{9\rho\rho'(\rho+\rho')}{2(\rho+2\rho')^2}$, ρ et ρ' étant les rayons de courbure du point de contact.

17. Si un arc donné d'une courbe roule, d'abord extérieurement, puis intérieurement, sur le même arc d'une courbe fixe, la somme des arcs des roulettes d'un même point est indépendante de la courbe fixe.

La même indépendance existe aussi pour la somme des aires comprises entre les lignes joignant le point entraîné au point de contact.

18. Si une parabole roule sur une droite, l'enveloppe de sa directrice est une chaînette.

19. Une chaînette, $s = c \operatorname{tang} \psi$, roule symétriquement sur une chaînette égale; l'équation de son axe est

$$\frac{d\sigma}{d\psi} = c \log \operatorname{tang} \frac{\pi - \psi}{4} + \frac{c}{2} \operatorname{tang} \frac{\psi}{2} \sec \frac{\psi}{2}.$$

20. La portion de la tangente en un point d'une hypocycloïde à trois sommets, comprise dans l'intérieur de la courbe, a une longueur constante.

21. Si une courbe ovale roule sur une ligne droite, prouver que l'aire tracée par un point O dans la courbe surpasse l'aire de la courbe de $\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\varphi$, en appelant

r la distance du point O à un point P de la courbe, et φ l'angle que la tangente en P fait avec une ligne fixe prise dans la courbe; appliquer ce théorème à trouver l'aire de la cycloïde.

22. Si une courbe ovale A roule sur une courbe égale et semblable B , de sorte que le point de contact est un centre de similitude, l'aire totale déterminée par un point O lorsque A a fait une révolution complète est double de l'aire que l'on aurait obtenue si la courbe A avait roulé sur une droite.

23. Une parabole roule sur une droite d'une des extrémités du paramètre à l'autre; la longueur de l'arc enveloppé par l'axe est $2a \log(2E)$.

24. Une parabole roule symétriquement sur une parabole égale d'une extrémité du paramètre $4a$ à l'autre; la longueur de l'arc enveloppé par l'axe est $2a \log(4E)$.

25. Un diamètre d'un cercle roule sur une courbe; l'enveloppe du cercle consiste en deux développantes de la courbe.

26. Un cercle de rayon b roule sur un cercle fixe de rayon a ; l'aire comprise entre le cercle fixe et l'enveloppe d'un diamètre pour une demi-révolution, d'une extrémité du diamètre à l'autre, est égale à $\frac{\pi b^2}{4a} (3a + b)$.

27. La lemniscate $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ roule sur une droite; l'équation tangentielle polaire de la roulette produite par son pôle est

$$\frac{dp}{d\varphi} + p \operatorname{tang} \varphi = a \operatorname{tang} \varphi \sqrt{\sin \varphi},$$

et l'équation de l'enveloppe de son axe est

$$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{a}{6 \sqrt{\cos \frac{2\varphi}{3}}} \left(5 \sin \varphi - 3 \sin \frac{\varphi}{3} \right).$$

28. Un cercle roule sur un cercle fixe ; l'enveloppe d'une droite est une développante d'épicycloïde.

29. Une chaînette roule sur une droite ; l'enveloppe d'une droite entraînée est une développante de parabole.

30. Une ellipse roule symétriquement sur une ellipse égale ; prouver que la longueur totale de l'arc enveloppé par son axe est

$$2a \left(1 + \frac{1-e^2}{e} \log \frac{1+e}{1-e} \right).$$

(*La suite prochainement.*)