Nouvelles annales de mathématiques

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 10 (1871), p. 453-465

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__453_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1026

(voir 2e série, t. X, p 240);

PAR M. O. CALLANDREAU,
Candidat à l'École Polytechnique.

La circonférence circonscrite à un polygone régulier de n côtés égaux à a est comprise entre na et $(n+1)a$.

(LIONNET.)

La première partie de la proposition étant évidente, je ne considère que la dernière.

Je puis prendre le rayon du cercle pour unité; dans cette supposition, le demi-côté du polygone régulier de n côtés est égal à $\sin\frac{\pi}{n}$, et il faut démontrer l'inégalité

$$\pi < (n+1)\sin\frac{\pi}{n},$$

d'où, successivement,

$$\frac{\pi}{n+1} < \sin\frac{\pi}{n},$$

$$\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n(n+1)} < \sin\frac{\pi}{n},$$

$$\frac{\pi}{n} - \sin\frac{\pi}{n} < \frac{\pi}{n(n+1)}.$$

La différence $\frac{\pi}{n} - \sin\frac{\pi}{n}$ est moindre que $\frac{\pi^3}{6n^3}$, et, pour $n \geqq 3$, on a

$$\frac{\pi^3}{6n^3} < \frac{\pi}{n(n+1)}.$$

En effet, l'inégalité $\frac{\pi}{n(n+1)} > \frac{\pi^3}{6n^3}$ revient à

$$\frac{n^2}{n+1} > \frac{\pi^2}{6};$$

cette dernière est évidente pour $n \geqq 3$, parce que $\frac{\pi^2}{6}$ est moindre que 2. La question est donc résolue.

Note. — Une solution fondée, comme la précédente, sur les formules de la Trigonométrie, nous a été adressée par M. H. Helderman, ancien élève de l'École Polytechnique de Delft, professeur de mathématiques.

Pour démontrer la proposition dont il s'agit au moyen seulement de la Géométrie élémentaire, je remarquerai d'abord que, si p et P représentent les périmètres de deux polygones réguliers de n côtés, l'un inscrit, l'autre circonscrit à un cercle dont le rayon est pris pour unité, et P′ le périmètre d'un polygone régulier de $2n$ côtés circonscrit au même cercle, on aura

$$\frac{P-p}{P+p} = \left(\frac{P'}{4n}\right)^2.$$

En effet, soient C le centre du cercle considéré, AB le côté du polygone inscrit p, DCD′ le diamètre perpendiculaire au milieu M de AB, et DF la moitié du côté du polygone P′.

Les droites CD, CM étant les apothèmes des polygones P, p, on a

$$\frac{P-p}{P+p} = \frac{CD-CM}{CD+CM} = \frac{MD}{MD'},$$

ou, parce que l'angle DAD′ est droit,

$$\frac{P-p}{P+p} = \left(\frac{AD}{AD'}\right)^2,$$

Or les triangles rectangles DAD′, FDC sont semblables et donnent

$$\frac{AD}{AD'} = \frac{DF}{DC} = DF;$$

mais

$$DF = \frac{P'}{4n},$$

donc

$$(1) \qquad \frac{P-p}{P+p} = \left(\frac{P'}{4n}\right)^2.$$

Cela posé, de la formule connue

$$P' = \frac{2Pp}{P+p},$$

on déduit

$$P' - p = p\left(\frac{P-p}{P+p}\right) = p\left(\frac{P'}{4n}\right)^2,$$

ou, en désignant par a le côté du polygone p,

$$(2) \qquad P' - p = a \times \frac{P'^2}{16n}.$$

Lorsque $n = 3$, il vient

$$P' = 4\sqrt{3}, \quad \frac{P'^2}{16n} = \frac{48}{48} = 1, \quad \text{et} \quad P' - p = a; \quad P' = (n+1)a.$$

Si n augmente à partir de 3, le périmètre P′ décroît; il en est de même, *à fortiori*, de $\frac{P'^2}{16n}$;

donc, pour

$$n > 3,$$

on a

$$P' - p < a; \quad P' < (n+1)a.$$

Ainsi, quel que soit le nombre n des côtés de p, la circonférence circonscrite à ce polygone est moindre que $(n+1)a$; c'est ce qu'il s'agissait de démontrer.

Le maximum de P'^2 étant 48, si l'on pose $n = 3m$, on aura, en ayant égard à l'égalité (2),

$$P' - p < a \times \frac{1}{m},$$

inégalité qui vérifie cette proposition, qu'il est possible d'inscrire dans un cercle un polygone régulier dont le nombre des côtés soit assez grand pour que le périmètre p de ce polygone diffère de la circonférence d'une quantité moindre qu'une fraction, aussi petite qu'on voudra, de son côté. (G.)

Question 1027

(voir 2e série, t. X, p. 240);

PAR M. E. KRUTCHWITZ,
Étudiant à Berlin.

On donne un cercle et trois sommets d'un quadrilatère inscrit; déterminer le quatrième sommet par la condition que le quadrilatère soit circonscriptible.

(FERRATS.)

Soient A, B, C les sommets donnés, et D le sommet cherché; puisqu'il faut que, dans tout quadrilatère circonscriptible, les sommes des côtés opposés soient égales entre elles, nous aurons

$$AB + CD = BC + AD,$$

d'où

$$AD - CD = AB - BC.$$

Le point D appartient donc à une hyperbole dont les foyers sont A et C, et dont l'axe transverse est égal à $AB - BC$ (en supposant $AB > BC$).

Comme le plus grand des deux côtés AD, CD doit être opposé au plus petit des côtés AB, BC pour que les deux sommes $AB + CD$, $BC + AD$ soient égales, il n'y a qu'un point d'intersection satisfaisant à la question. Mais nous pouvons avoir trois solutions, selon que nous prenons A et C, ou A et B, ou B et C pour foyers de l'hyperbole.

Construction géométrique. — On décrit une circonférence du point A comme centre, avec un rayon égal à AB — BC; et sur la droite AC un segment capable de l'angle $\pi - \frac{ABC}{2}$, et du côté opposé à B. On joint ensuite le point A au point E, où l'arc de segment capable coupe la circonférence décrite du point A comme centre. En prolongeant la droite AE jusqu'à la rencontre de la circonférence, on aura le point D cherché. En effet, les égalités $AEC = \pi - \frac{ABC}{2}$ et $ADC = \pi - ABC$ donnent

$$DEC = \frac{ABC}{2} = DCE,$$

d'où

$$DC = DE \quad \text{et} \quad DA - DC = AE = AB - BC.$$

C. Q. F. D.

Note. — La même question a été résolue par M. Callandreau, candidat à l'École Polytechnique.

Questions 1036, 1037

(voir 2e série, t. X, p. 336);

PAR M. O. CALLANDREAU.

1036. *On donne le centre d'une ellipse, un point de la courbe et le centre du cercle osculateur en ce point; déterminer les axes de l'ellipse.*

p étant la distance du centre à la tangente au point donné,

ρ le rayon de courbure au même point,

b' le diamètre conjugué à celui qui passe par le même point, on a la relation bien connue

$$p = \frac{b'^2}{\rho}:$$

or on connaît p et ρ, donc b' pourra être facilement déterminé en grandeur et en direction. D'ailleurs son conjugué est connu aussi en grandeur et en direction. Le problème est donc ramené à une question connue.

1037. *On donne en position l'axe focal d'une ellipse, un point de la courbe et le centre du cercle osculateur en ce point; déterminer les axes de l'ellipse.*

Nous nous servirons ici de la formule

$$\rho = \frac{n}{\cos^2\psi},$$

n longueur de la normale;

ψ angle de cette normale avec un des rayons vecteurs.

La relation déterminera ψ par le moyen de ρ et n, dont l'un est connu et dont l'autre peut être facilement déterminé. On aura alors les foyers de l'ellipse et un point, et tous les autres éléments pourront être connus.

Note. — Les mêmes questions ont eté traitées par M. X., du lycée Louis-le-Grand.

Question 964

(voir 2e série, t. VIII, p. 560);

PAR M. PROSPER PEIN.

Par un point M *d'une ellipse, on peut mener trois normales à la courbe, indépendamment de celle qui a son pied en* M; *sur chacune de ces normales, on porte, à partir du point* M, *une longueur égale au segment intercepté entre le grand axe et l'ellipse: les trois points* *ainsi obtenus sont situés sur un cercle qui touche l'ellipse au point* M. (LAGUERRE.)

Rapportons l'ellipse à ses axes. Les coordonnées d'un point sont

$$x = a\cos\varphi,\quad y = b\sin\varphi.$$

La normale en ce point a pour équation

$$ax\sin\varphi - by\cos\varphi = c^2\sin\varphi\cos\varphi.$$

Cette droite rencontre la courbe en un second point dont les coordonnées sont

$$a\cos\varphi',\quad b\sin\varphi'.$$

φ' est lié à φ par la relation

$$a^2\sin\varphi\cos\varphi' - b^2\cos\varphi\sin\varphi' = c^2\sin\varphi\cos\varphi,$$

qui peut s'écrire

$$\operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\frac{\varphi+\varphi'}{2} = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Le segment intercepté par l'ellipse et le grand axe a pour expression

$$R = \frac{b}{a}(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}.$$

En divisant cette longueur par le cosinus de l'angle θ que font entre elles la normale au point φ et la normale au point φ', nous trouvons une expression indépendante de φ.

En effet

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{ba(\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\varphi')}{b^2 + a^2\operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\varphi'},$$

$$\frac{1}{\cos\theta} = \frac{(b^2 + a^2\operatorname{tang}^2\varphi)^{\frac{1}{2}}(b^2 + a^2\operatorname{tang}^2\varphi')^{\frac{1}{2}}}{b^2 + a^2\operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\varphi'},$$

$$\frac{R}{\cos\theta} = \frac{b\cos\varphi(b^2 + a^2\operatorname{tang}^2\varphi)(b^2 + a^2\operatorname{tang}^2\varphi')^{\frac{1}{2}}}{a(b^2 + a^2\operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\varphi')}.$$

Remplaçons $-\frac{b^2}{a^2}$ par $\operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\frac{\varphi+\varphi'}{2}$, il vient

$$\frac{\mathrm{R}}{\cos\theta} = \frac{b}{a}(b^2 + a^2 \operatorname{tang}^2\varphi')^{\frac{1}{2}},$$

expression indépendante de φ.

Donc les segments déterminés sur les trois normales qui partent du point M, portés sur ces normales à partir du point M, sont les projections d'une longueur constante comptée sur la normale en M, à partir du point M. Donc les extrémités des trois segments sont sur un même cercle tangent en M à l'ellipse.

Question 1002

(voir 2ᵉ série, t. IX, p. 431);

PAR M. H. LEZ.

En un point d'une ellipse, on prend sur la normale, en dehors de la courbe, une longueur égale au rayon de courbure en ce point : le cercle décrit sur cette longueur comme diamètre coupe orthogonalement le lieu des sommets des angles droits circonscrits à l'ellipse.

(STEINER.)

En un point quelconque D d'une ellipse, dont les demi-axes sont $\mathrm{OA} = a$, $\mathrm{OB} = b$, soit menée la normale $\mathrm{DN} = n$, qui rencontre l'axe OA en N. Prenons sur cette normale, en dehors de la courbe, la longueur DE égale au rayon de courbure $\rho = \frac{a^2 n^3}{b^4}$. Soient C le milieu de DE, I et K les projections des points D et C sur l'axe OA, T le point où la tangente en D à l'ellipse coupe la droite OA prolongée, enfin M l'un des points d'intersection des cercles qui ont pour centres les points C et O, et respectivement pour rayons CD et $\sqrt{a^2+b^2}$. Il s'agit de démontrer que ces deux cercles se coupent orthogonalement, ce qui revient à prouver que le triangle OMC est rectangle en M, ou bien que l'on a

$$\mathrm{OM}^2+\mathrm{MC}^2=a^2+b^2+\left(\frac{a^2n^3}{2b^4}\right)^2=\mathrm{OC}^2.$$

Or

(1) $$\mathrm{OC}^2=\mathrm{OK}^2+\mathrm{CK}^2.$$

Mais les triangles semblables NDI, NCK donnent

$$\mathrm{CK}=\frac{\mathrm{DI.NC}}{\mathrm{ND}};$$

on a de même

$$\mathrm{NK}=\frac{\mathrm{CK.NI}}{\mathrm{DI}}=\frac{\mathrm{NI(ND+DC)}}{\mathrm{ND}}.$$

De plus,

$$\mathrm{OK}=\mathrm{NK}+\mathrm{OI}-\mathrm{IN}.$$

On peut donc écrire l'égalité (1) sous la forme

$$\mathrm{OC}^2=\left(\frac{\mathrm{CK.NI}}{\mathrm{DI}}+\mathrm{OI}-\mathrm{IN}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{DI.NC}}{\mathrm{ND}}\right)^2,$$

qui devient, en réduisant,

$$\mathrm{OC}^2=\left(\frac{\mathrm{DC.NI}+\mathrm{OI.ND}}{\mathrm{ND}}\right)^2+\left[\frac{\mathrm{DI(ND+CD)}}{\mathrm{ND}}\right]^2.$$

Cela posé, la sous-normale $\mathrm{NI}=\dfrac{b^2x}{a}$; donc

$$\mathrm{OC}^2=\left(\frac{\dfrac{n^3a^2}{2b^4}\cdot\dfrac{b^2x}{a^2}+nx}{n}\right)^2+\left[\frac{y\left(n+\dfrac{n^3a^2}{2b^4}\right)}{n}\right]^2.$$

Transformant cette nouvelle expression, on obtient

$$\mathrm{OC}^2=\frac{4b^8(x^2+y^2)+n^4(b^4x^2+a^4y^2)+4n^2b^4(b^2x^2+a^2y^2)}{4b^8}.$$

Mais la longueur de la normale ND est donnée par l'égalité

$$n^2 = \frac{b^4 x^2 + a^4 y^2}{a^4};$$

et, d'après l'équation de l'ellipse, $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$; l'égalité (1) revient donc à

$$\mathrm{OC}^2 = \frac{4b^8(x^2+y^2) + n^6 a^4 + 4n^2 b^6 a^2}{4b^8}.$$

Or

$$\frac{n^2 a^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2}\left(\frac{b^4 x^2 + a^4 y^2}{a^4}\right) = \frac{a^2 y^2}{b^2} + \frac{b^2 x^2}{a^2};$$

par suite

$$\mathrm{OC}^2 = x^2 + y^2 + \frac{n^6 a^4}{4b^8} + \frac{a^2 y^2}{b^2} + \frac{b^2 x^2}{a^2};$$

d'où

$$\mathrm{OC}^2 = a^2 + b^2 + \frac{n^6 a^4}{4b^8}.$$

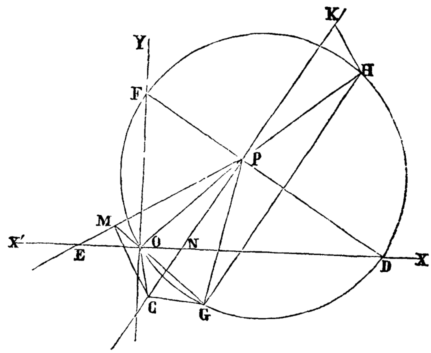
Ce qu'il fallait trouver.

Note. — MM. Pellet et Moret-Blanc ont résolu, de même, la question par le calcul.

Solution géométrique de la même question.

Supposons que OX et OY représentant les directions des axes $2a$, $2b$ de l'ellipse, la droite DPF soit tangente, au point P, à la courbe, et PN normale. Si l'on mène, du point P, une droite PE, qui fasse avec OX un angle PED égal à PDE, et par le centre O de l'ellipse la droite OM, de manière que l'angle MOE soit égal à POD, la perpendiculaire élevée à PE, au point M d'intersection des droites PE, OM, rencontrera la normale PN, au centre C, du cercle osculateur à l'ellipse au point P (*).

Soient maintenant G, H les points où les droites MO, OP prolongées coupent la circonférence décrite sur DF



comme diamètre, et HK une perpendiculaire à OH rencontrant en K le prolongement de CP, on aura

$$PK = PC.$$

En effet, la droite OD étant bissectrice de l'angle GOH, le point D est le milieu de l'arc GDH, et, par suite, le diamètre DF est perpendiculaire au milieu de la corde GH, ce qui montre que la droite PG = PH, et que l'angle CPG = HPK = CPO. Mais il résulte évidemment de la construction qui a déterminé le centre C, que l'angle

(*) Car il résulte du théorème de Newton sur les rectangles des cordes, que la circonférence osculatrice à l'ellipse au point P, coupe l'ellipse en un point P', tel que la *corde* PP' fait avec les axes les mêmes angles que la tangente PD. La droite PP' est donc dirigée suivant PE. En outre, les égalités d'angles PED = PDE, MOE = POD montrent que la direction de OM est celle du diamètre conjugué à la corde PP', puisque le rayon OP est conjugué aux cordes parallèles à la tangente DPF; donc le point M est le milieu de la corde PP', et par conséquent le centre C de la circonférence osculatrice, au point P, appartient à la fois à la perpendiculaire MC et à la normale PN.

$CPO = GMC$; donc $CPG = GMC$. De cette dernière égalité, il faut conclure que les quatre points P, M, C, G appartiennent à une même circonférence, et que l'angle PGC est droit.

Les triangles rectangles PGC, PHK sont égaux, puisqu'on a $PG = PH$ et $\widehat{CPG} = \widehat{HPK}$; donc $PK = PC$.

Cela posé, remarquons que $OP \times PH = PF \times PD$. Or, le produit $PF \times PD$ étant égal au carré du demi-diamètre de l'ellipse conjugué à OP, on a

$$PF \times PD = a^2 + b^2 - OP^2;$$

d'où

$$OP \times PH = a^2 + b^2 - OP^2,$$

égalité qui donne successivement

$$OP^2 + OP \times PH = a^2 + b^2; \quad OP \times OH = a^2 + b^2.$$

Donc la puissance du point O, par rapport à la circonférence décrite sur PK comme diamètre, est égale à $a^2 + b^2$. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. — Les considérations précédentes conduisent à des solutions très-simples de plusieurs questions ayant pour objet de déterminer les axes $2a$, $2b$ d'une ellipse au moyen de certaines données, parmi lesquelles se trouve le rayon du cercle osculateur en un point de la courbe.

1° Les données sont le centre O de l'ellipse et le rayon CP du cercle osculateur au point P de la courbe.

On inscrira, dans le cercle décrit sur CP comme diamètre, une corde PG, qui fasse avec PC un angle $CPG = CPO$. Les axes $2a$, $2b$ de l'ellipse seront dirigés suivant les bissectrices OX, OY des angles POG, POM. Et, en désignant par D, F les points où ces bissectrices rencontrent la tangente DPF, et par x et y les perpendiculaires abaissées du point P sur les droites OY, OX, on aura

$$a^2 = OD \times x \quad \text{et} \quad b^2 = OF \times y.$$

2° On donne la droite X'X, suivant laquelle l'axe $2a$ est dirigé; et le rayon CP du cercle osculateur au point P.

Soient menées la droite PE qui fasse avec X'X l'angle PED = PDE, et la perpendiculaire CM à PE. Le centre O de l'ellipse se trouvera à la rencontre de la droite X'X et de la droite menée du point M au symétrique du point P par rapport à X'X. Les grandeurs des axes $2a$, $2b$ seront ensuite déterminées par les formules

$$a^2 = OD \times x, \quad b^2 = OF \times y.$$

3° On donne le rayon CP du cercle osculateur et les points D, F, où la tangente DPF rencontre les directions des axes OX, OY.

Soit H un point commun aux deux circonférences qui ont respectivement pour diamètres DPF, et la droite PK égale à CP et prise, à partir du point P, sur le prolongement de CP. On obtiendra le centre O de l'ellipse, en prolongeant la droite HP jusqu'à sa rencontre avec la circonférence dont DF est le diamètre. Les axes seront dirigés suivant les droites OD, OF, et leurs grandeurs se détermineront comme précédemment. La question peut admettre deux solutions.

Il est encore facile de trouver la valeur de la distance des centres O, C en fonction des rayons OP, CP et des axes de l'ellipse. En effet, la droite PH étant égale à la projection de CP sur OP, le triangle OCP donne

$$OC^2 = OP^2 + CP^2 - 2OP.PH.$$

Mais on a vu que $OP \times PH = a^2 + b^2 - OP^2$; donc

$$OC^2 = 3OP^2 + CP^2 - 2(a^2 + b^2).$$

(G.)