Nouvelles annales de mathématiques

J. Wolstenholme

Exercices sur le tétraèdre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 10 (1871), p. 451-452

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__451_0>

EXERCICES SUR LE TÉTRAÈDRE;

PAR LE RÉV. J. WOLSTENHOLME

(Traduit de l'anglais de *The Educational Times*.)

1. Dans un tétraèdre ABCD, si AB est perpendiculaire sur CD, et AC perpendiculaire sur BD, il en résulte que AD est perpendiculaire sur BC. Un tel tétraèdre peut être appelé *rectangle*, et l'on a

$$BC^2 + AD^2 = CA^2 + BD^2 = AB^2 + CB^2.$$

2. Dans un tétraèdre rectangle, les perpendiculaires abaissées des sommets sur les faces opposées se coupent en un point, que nous appellerons le *centre des perpendiculaires*. Un tel point n'existe pas pour un autre tétraèdre.

3. Les trois droites qui rencontrent à angle droit les couples d'arêtes opposées passent par le centre des perpendiculaires.

4. Il existe une sphère polaire à un tétraèdre rectangle telle, que chaque sommet du tétraèdre est le pôle de la face opposée par rapport à cette sphère : son centre est le centre des perpendiculaires. Cette sphère n'est possible qu'autant que tous les angles plans comprenant un angle solide sont obtus.

5. On peut mener une sphère par les milieux des arêtes et les pieds des plus courtes distances entre les arêtes opposées, et le centre de cette sphère est le centre d'inertie du tétraèdre qui bissecte la distance entre le centre de la sphère circonscrite et le centre des perpendiculaires (première sphère des douze points).

6. La sphère qui passe par les centres de gravité des faces passe aussi par leur centre des perpendiculaires, et ces points sont, sur une face, les extrémités d'un diamètre du cercle suivant lequel cette face coupe la sphère. Cette sphère trisecte la partie d'une perpendiculaire au tétraèdre comprise entre le sommet (seconde sphère de douze points).

7. Ces sphères et la sphère circonscrite ont un plan radical commun, et, à ce système de sphères appartient aussi la sphère qui a pour extrémités de son diamètre le centre d'inertie et le centre des perpendiculaires.

8. Si R, ρ sont les rayons de la sphère circonscrite et de la sphère polaire, et δ la distance de leurs centres, $\delta^2 = R^2 + 3\rho^2$, et le rayon de la première sphère des douze points est $\frac{1}{2}(R^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}$, celui de la seconde est $\frac{1}{3}R$, et celui de la sphère (7) est $\frac{1}{4}(R^2 + 3\rho^2)^{\frac{1}{2}}$. Le rayon de la section commune de toutes ces sphères est $\frac{\rho}{\delta}(R^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}$.

9. Si R, ρ' sont les rayons de la sphère circonscrite et de la première sphère des douze points, et δ' la distance de leurs centres, $\delta'^2 = R^2 - \rho'^2$.

10. Les centres de similitude de la sphère circonscrite et de la seconde sphère des douze points sont les centres d'inertie et des perpendiculaires du tétraèdre. Donc, si $ALA'a$, mené par le centre des perpendiculaires, rencontre la face opposée en A' et la sphère circonscrite en a, $La = 3\,LA'$.