NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CHARLES RUCHONNET

De l'hélice osculatrice

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 10 (1871), p. 444-450

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__444_1>

DE L'HÉLICE OSCULATRICE;

PAR M. CHARLES RUCHONNET (de Lausanne).

L'hélice tracée sur un cylindre circulaire droit est une courbe éminemment simple entre les courbes gauches, car elle est la même en tous ses points. A ce titre, il y a intérêt à la mettre en contact aussi intime que possible avec les autres courbes gauches, tout comme la droite et le cercle, le plan et la sphère. Mais il est nécessaire, au préalable, de rappeler deux ou trois formules dont nous aurons besoin.

Soient R et S les rayons de première et de seconde courbure de l'hélice, r le rayon de la section droite du cylindre, et α l'inclinaison constante des tangentes de l'hélice sur le plan de cette section; on connaît, ou l'on établit aisément les deux relations

$$R = \frac{r}{\cos^2\alpha}, \tag{1}$$

$$\tang\alpha = \frac{R}{S}, \tag{2}$$

et l'on en déduit

$$r = \frac{RS^2}{R^2 + S^2}. \tag{3}$$

L'égalité (1) montre que, pour qu'on puisse tracer sur un cylindre donné une hélice dont le rayon du cercle osculateur ait une valeur donnée R, il suffit que r soit plus petit que R. Il y a donc une infinité d'hélices qui ont le même cercle osculateur. Les relations (2) et (3) montrent que, si l'on veut construire une hélice dont les deux rayons de courbure aient des valeurs données R et S, le problème a toujours une solution, et, comme α est nécessairement compris entre 0 et 90 degrés, que cette solution est unique.

Ceci posé, considérons une courbe gauche quelconque. Soient M, M′ deux de ses points infiniment voisins, et ρ, σ les rayons de première et de seconde courbure au point M. Par ce point faisons passer une hélice. Afin de rendre le contact aussi intime que possible, disposons la de manière qu'elle ait en M même tangente et même plan osculateur que la courbe. Par le point M′, menons un plan perpendiculaire à la tangente commune en M : il coupe l'hélice en un point N′, et nous compterons la distance des deux courbes suivant M′N′. Cette longueur est du second ordre seulement si elles n'ont pas au point M le même cercle osculateur; nous supposerons donc qu'on ait $R = \rho$, c'est-à-dire que l'hélice soit bien l'une quelconque de celles où r et α sont liés par la relation qu'on déduit de l'équation (1) en changeant R en ρ.

Pour obtenir une expression de la grandeur M′N′, faisons usage des projections de la courbe donnée et de l'hélice sur le plan osculateur commun. Soient m', n' les points où ces projections sont coupées par le plan considéré tout à l'heure (*). Ce même plan coupe la tangente et le cercle osculateur communs en des points t et k. Soit enfin c le pied de la perpendiculaire abaissée de N′ sur M′m'. Le triangle M′N′c, rectangle en c, donne

$$(4) \qquad M'N' = \sqrt{\overline{N'c}^2 + \overline{M'c}^2}.$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

La détermination des deux longueurs qui figurent sous le radical sera fondée sur quelques théorèmes que je vais rappeler, et pour la démonstration desquels je renvoie au *Traité de Calcul différentiel*, par M. J. Bertrand, comme à l'ouvrage le plus répandu.

I. La distance d'une courbe gauche au plan osculateur, dans le voisinage du point de contact, est une quantité du troisième ordre, qui est égale au cube de l'arc divisé par six fois le produit des deux rayons de courbure. Par conséquent, $M'm'$ est égal à $\frac{1}{6}\frac{\overline{\text{arc}\,MM'}^3}{\rho\sigma}$, et, comme on a par hypothèse $R = \rho$, $N'n'$ est égal à $\frac{1}{6}\frac{\overline{\text{arc}\,MN'}^3}{\rho S}$.

II. A et B étant deux points d'une courbe plane infiniment voisins, ω désignant le rayon de courbure en A, et $d\omega$ l'accroissement que reçoit ω quand on passe du premier de ces points au second; la distance de B au cercle osculateur en A est une grandeur du troisième ordre (l'arc AB étant considéré comme du premier) qui a pour expression $\frac{d\omega}{6\omega}\,\overline{\text{arc}\,AB}^2$.

III. L'accroissement $d\omega$ est en général du premier ordre, mais il peut arriver, en des points exceptionnels et isolés, qu'il soit du second. Il résulte du précédent théorème que la distance de B au cercle osculateur en A est alors d'un ordre supérieur au troisième.

IV. Une courbe gauche et sa projection sur le plan osculateur ont au point de contact même cercle osculateur.

V. Désignons, comme plus haut, par M, M' deux points d'une courbe gauche infiniment voisins, et par m'

la projection de M' sur le plan osculateur en M. Soit, au point M', $\rho + d\rho$ le rayon du cercle osculateur de la courbe gauche; le rayon du cercle osculateur de sa projection est, en m', égal aussi à $\rho + d\rho$, à une quantité près du second ordre.

Nous retournons maintenant à l'équation (4). Considérons la première des deux quantités qui figurent sous le radical du second membre. A cause de $\mathrm{N}'c = m'n'$, on a

$$\mathrm{N}'c = m'k - n'k. \tag{5}$$

Posons arc $\mathrm{MM}' = ds$, arc $\mathrm{M}m' = ds'$. La courbe MM' et sa projection $\mathrm{M}m'$ ont même cercle osculateur au point M (IV), et si nous désignons par $d\rho'$ l'accroissement que reçoit le rayon de courbure de la projection quand on passe de M à m', on a (II)

$$m'k = \frac{1}{6}\,\frac{d\rho'\,ds'^2}{\rho^2};$$

mais ds et ds' sont évidemment égaux, et il en est de même (V) de $d\rho$ et $d\rho'$, donc

$$m'k = \frac{1}{6}\,\frac{d\rho\,ds^2}{\rho^2}.$$

Le cercle osculateur ne variant pas sur l'hélice d'un point à un autre, il est en N' précisément égal à ρ, et, dès lors, au point n' de la projection de l'hélice, il ne diffère de ρ que d'une quantité du second ordre (V). Par conséquent, sur la courbe $\mathrm{M}n'$, le rayon de courbure ne croît de M à n' que d'une quantité du second ordre. Il suit de là que $n'k$ est d'un ordre supérieur au troisième (III); il est donc négligeable par rapport à $m'k$ qui est du troisième ordre, et les équations (5) et (6) donnent alors

$$\mathrm{N}'c = \frac{1}{6}\,\frac{d\rho\,ds^2}{\rho^2}.$$

Telle est la valeur de la première des deux quantités qui figurent au second membre de l'équation (4) ci-dessus. L'autre ne saurait être d'un ordre inférieur au troisième, car elle est égale à la différence de deux longueurs $M'm'$ et $N'n'$ qui sont toutes deux du troisième ordre (I).

La distance de la courbe à l'hélice est donc du troisième ordre pour toutes les hélices qui ont avec la courbe le cercle osculateur commun.

Parmi les droites qui rencontrent une courbe en un point donné, il en est une, la tangente, qui dans les environs de ce point est infiniment plus voisine de la courbe que toutes les autres; de même, parmi les cercles, il y en a un, le cercle osculateur, qui près du point de contact serre la courbe d'infiniment plus près que tous les autres, et le plan ainsi que la sphère présentent la même particularité. Mais l'hélice n'offre rien de semblable; il existe une infinité d'hélices dont la distance à la courbe est du troisième ordre, et parmi elles il ne s'en trouve aucune où cette distance soit d'un ordre supérieur.

Toutefois, l'une de ces hélices est, sinon infiniment plus voisine, du moins plus voisine de la courbe que toutes les autres. On la nomme *hélice osculatrice*, et nous l'obtiendrons en réduisant à son minimum la valeur de $M'N'$ donnée par l'équation (4).

Des deux quantités qui figurent au second membre de cette équation, la première, nous venons de le voir, a une valeur constante, en sorte qu'il n'y a lieu de considérer que la seconde, $M'c$. On a

$$M'c = M'm' - N'n'.$$

Les valeurs de $M'm'$, $N'n'$ ont été données plus haut (I); on peut y remplacer les arcs MM', MN'

par Mt; les substituant alors dans l'équation (7), il vient

$$M'c = \frac{1}{6}\frac{\overline{Mt}^3}{\rho}\left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{S}\right).$$

On voit par cette égalité que si l'hélice satisfait à la condition $S = \sigma$, $M'c$ s'annule, ou, pour parler exactement, est d'un ordre supérieur au troisième, et que ceci n'a lieu pour aucune autre valeur de S. Il existe toujours une hélice dont les rayons de première et de seconde courbure sont respectivement égaux à ρ et à σ, elle est unique, et c'est là l'hélice osculatrice. D'après ce que nous avons vu plus haut, sa distance à la courbe dans le voisinage du point de contact est égale à $\frac{1}{6}\frac{d\rho\, ds^2}{\rho^2}$, ce qui est précisément l'expression de la distance d'une courbe plane au cercle osculateur. Le cercle osculateur des courbes planes est un cas particulier de l'hélice osculatrice; c'est le cas limite qui se présente quand la torsion est nulle. En effet, les valeurs de $\tang\alpha$ et de r relatives à cette hélice sont, en vertu des équations (2) et (3) ci-dessus,

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\rho}{\sigma},$$

$$r = \frac{\rho\sigma^2}{\rho^2 + \sigma^2},$$

et si l'on suppose que la torsion diminue indéfiniment, tendant vers zéro, alors σ va croissant indéfiniment, et à la limite, il vient

$$\alpha = 0,$$

$$r = \rho,$$

c'est-à-dire que l'hélice osculatrice se réduit au cercle de rayon ρ, qui est le cercle osculateur.

L'hélice osculatrice est donc celle qui a mêmes rayons de première et de seconde courbure, ou, en d'autres termes, même angle de contingence et même angle de torsion que la courbe au point considéré. De cette définition il est aisé de déduire la situation de l'axe du cylindre sur lequel elle est tracée. Nous savons déjà qu'il rencontre la normale principale au point de contact, et qu'il la coupe à angle droit, car cela résulte, indépendamment de toute valeur attribuée à R et à S, de ce que la courbe donnée et l'hélice ont au point commun même tangente et même plan osculateur. Pour le déterminer complétement, concevons deux courbes quelconques disposées l'une par rapport à l'autre, comme le sont la courbe donnée et l'hélice osculatrice, et supposons qu'elles aient au point de contact M même angle de contingence et même angle de torsion. A partir de M prenons sur les deux courbes des arcs infiniment petits MM' et MN' égaux : la distance $M'N'$ est d'un ordre supérieur à celui de ces arcs, et il en est de même de l'angle que font entre elles les normales principales en M' à la première courbe, et en N' à la seconde.

Dès lors, la commune perpendiculaire aux normales principales en M et en M' à la première courbe, tend à se confondre avec la commune perpendiculaire aux normales principales en M et en N' à la seconde.

Ceci posé, supposons que l'une des deux courbes soit l'hélice osculatrice ; dans toute hélice tracée sur un cylindre circulaire droit, les normales principales rencontrent toutes l'axe du cylindre, et le coupent à angle droit, en sorte que la commune perpendiculaire de deux normales principales est située sur cet axe. Donc, *l'axe du cylindre sur lequel est tracée l'hélice osculatrice n'est autre que la commune perpendiculaire à deux normales principales de la courbe donnée infiniment voisines, prolongée de part et d'autre.*