J. Graindorge

Questions de licence

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 10 (1871), p. 439-444

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__439_1>

QUESTIONS DE LICENCE;

PAR M. J. GRAINDORGE,
Répétiteur à l'École des Mines de Liége.

Trouver le mouvement d'un point matériel sollicité par deux forces dirigées vers un centre : l'une attractive et proportionnelle à la distance, l'autre répulsive et en raison inverse du cube de la distance. On suppose la vitesse initiale perpendiculaire au rayon vecteur initial.

Prenons pour origine le point fixe, et pour axe polaire le rayon vecteur initial que nous représenterons par r_0; désignons par v_0 la vitesse initiale, et appliquons les deux formules connues

$$(1)\qquad P = \frac{c^2}{r^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}\right),$$

$$(2)\qquad v^2 = c^2\left[\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2\right],$$

dans lesquelles nous ferons $\frac{1}{r} = u$, ce qui donnera, dans le cas actuel,

$$(3)\qquad c^2u^2\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right) = \frac{\mu}{u} - \mu' u^3.$$

De cette formule, on déduit

$$c^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} = \frac{\mu}{u^3} - (c^2 + \mu')\, u,$$

et, en intégrant,

$$(4) \qquad c^2 \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = 2k - \frac{\mu}{u^2} - (c^2 + \mu')\, u^2;$$

on détermine la constante $2k$ par les conditions initiales du mouvement : pour $\theta = 0$, on a

$$r = r_0, \quad \text{ou} \quad u = u_0;$$

d'où

$$c^2 \left(\frac{du}{d\theta}\right)_0^2 = 2k - \frac{\mu}{u_0^2} - (c^2 + \mu')\, u_0^2.$$

On déduira $\left(\frac{du}{d\theta}\right)_0$ de la formule (2), en faisant $\theta = 0$,

$$v_0^2 = c^2 \left[u_0^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)_0^2 \right].$$

Par suite,

$$(5) \qquad 2k = v_0^2 + \frac{\mu}{u_0^2} + \mu' u_0^2,$$

et l'équation (4) devient

$$c^2 \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = v_0^2 + \frac{\mu}{u_0^2} + \mu' u_0^2 - \frac{\mu}{u^2} - (c^2 + \mu')\, u^2.$$

Pour simplifier les notations, nous garderons la constante $2k$, et nous déduirons de la formule (4)

$$d\theta = -\frac{cu\, du}{\sqrt{2ku^2 - (c^2 + \mu')\, u^4 - \mu}}.$$

Pour intégrer cette expression, posons $u^2 = z$, et il vient

$$d\theta = -\frac{c}{2} \frac{dz}{\sqrt{2kz - (c^2 + \mu')\, z^2 - \mu}},$$

ou bien

$$d\theta = -\frac{c}{2}\,\frac{\sqrt{c^2+\mu'}\,dz}{\sqrt{k^2-\mu(c^2+\mu')}\sqrt{1-\frac{[(c^2+\mu')z-k]^2}{k^2-\mu(c^2+\mu')}}};$$

par conséquent,

$$\theta = \omega + \frac{c}{2\sqrt{c^2+\mu'}}\arc\cos\frac{(c^2+\mu')z-k}{\sqrt{k^2-\mu(c^2+\mu')}},$$

ou

$$\frac{(c^2+\mu')z-k}{\sqrt{k^2-\mu(c^2+\mu')}} = \cos\frac{2\sqrt{c^2+\mu'}}{c}(\theta-\omega).$$

L'équation de la trajectoire est donc

$$(6)\quad \frac{1}{r^2} = \frac{k}{c^2+\mu'} + \frac{\sqrt{k^2-\mu(c^2+\mu')}}{c^2+\mu'}\cos\frac{2\sqrt{c^2+\mu'}}{c}(\theta-\omega),$$

ω étant un angle constant, qui, dans le cas actuel, sera nul, puisque le rayon vecteur initial coïncide avec l'axe polaire. La vitesse initiale étant perpendiculaire au rayon vecteur initial, on a

$$c = r_0 v_0,$$

et l'on trouvera, après quelques réductions,

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r_0^2}\cos^2\frac{\sqrt{v_0^2 r_0^2+\mu'}}{v_0 r_0}\theta + \frac{\mu r_0^2}{v_0^2 r_0^2+\mu'}\sin^2\frac{\sqrt{v_0^2 r_0^2+\mu'}}{v_0 r_0}\theta.$$

En posant $\frac{\sqrt{v_0^2 r_0^2+\mu'}}{v_0 r_0} = \alpha$, l'équation de la trajectoire prend la forme

$$(7)\qquad r^2 = \frac{\alpha^2 v_0^2 r_0^2}{\alpha^2 v_0^2\cos^2\alpha\theta + \mu r_0^2\sin^2\alpha\theta}.$$

La formule

$$(8)\qquad r^2\,d\theta = c\,dt$$

nous donne

$$v_0 r_0 dt = \frac{\alpha^2 v_0^2 r_0^2}{\alpha^2 v_0^2 \cos^2\alpha\theta + \mu r_0^2 \sin^2\alpha\theta} d\theta,$$

d'où, en intégrant,

$$t + \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \text{arc tang}\left(\frac{r_0\sqrt{\mu}}{\alpha v_0} \text{tang}\,\alpha\theta\right),$$

ou

$$\text{tang}\,\alpha\theta = \frac{\alpha v_0}{r_0\sqrt{\mu}} \text{tang}(t + \varepsilon)\sqrt{\mu}.$$

Mais, pour $t = 0$, on a $\theta = 0$; donc $\varepsilon = 0$, et il vient

(9) $$\text{tang}\,\alpha\theta = \frac{\alpha v_0}{r_0\sqrt{\mu}} \text{tang}(t\sqrt{\mu}).$$

En remplaçant $d\theta$ par sa valeur dans (8), on trouve

$$dt = \frac{r\,dr}{\sqrt{-(c^2 + \mu') + 2kr^2 - \mu r^4}},$$

ou, en posant $r^2 = z$, et intégrant

$$t + \varepsilon' = \frac{1}{2\sqrt{\mu}} \text{arc cos} \frac{k - \mu z}{\sqrt{k^2 - \mu(c^2 + \mu')}}.$$

On déduit de là

$$\mu r^2 = \frac{1}{2}\left(v_0^2 + \mu r_0^2 + \frac{\mu'}{r_0^2}\right) - \frac{1}{2}\left(v_0^2 - \mu r_0^2 + \frac{\mu'}{r_0^2}\right)\cos^2(t + \varepsilon')\sqrt{\mu},$$

ou bien

$$\mu r^2 = \left(v_0^2 + \frac{\mu'}{r^2}\right)\sin^2(t + \varepsilon')\sqrt{\mu} + \mu r_0^2 \cos^2(t + \varepsilon')\sqrt{\mu}.$$

La constante ε' est déterminée en observant que, pour $t = 0$, $r = 0$; donc $\varepsilon' = 0$, et il vient

(10) $$\mu r^2 = \alpha^2 v_0^2 \sin^2 t\sqrt{\mu} + \mu r_0^2 \cos^2 t\sqrt{\mu}.$$

Discussion. — Le nombre α peut être entier, fractionnaire, ou bien incommensurable; d'ailleurs, il est plus grand que l'unité, puisque $\alpha = \frac{\sqrt{v_0^2 r_0^2 + \mu'}}{v_0 r_0}$. Nous supposerons $\mu r_0^3 - \alpha^2 v_0^2 > 0$.

Premier cas. — Lorsque α est entier, on voit facilement que la trajectoire est une *rosace fermée*, ayant 2α maximums égaux au rayon vecteur initial $OA = r_0$, et $2a$ minimums qui ont pour valeur commune $OB = \frac{\alpha v_0}{\sqrt{\mu}}$.

Deuxième cas. — α fractionnaire et égal à $\frac{p}{q}$.

1° Si q est pair, le point matériel revient au point de départ pour $\theta = q\pi$; la courbe a p maximums égaux à r_0, et p minimums égaux à $\frac{\alpha v_0}{\sqrt{\mu}}$.

2° Si q est impair, le point matériel revient au point de départ pour $\theta = 2q\pi$, et la courbe a $2p$ maximums et $2p$ minimums. Elle est fermée dans les deux cas.

Troisième cas. — α *incommensurable*.

Le point matériel ne revient jamais au point de départ; car il faudrait que l'on eût

$$\frac{n\pi}{2\alpha} = 2k\pi, \quad \text{ou} \quad n = 4k\alpha,$$

n et k étant des nombres entiers, ce qui est impossible, puisque, par hypothèse, α est incommensurable. La trajectoire est donc une courbe que l'on peut, par analogie, appeler *rosace spirale*.

Remarque. — Il est facile de voir que la trajectoire est la transformée d'une courbe tracée sur un cône de révolution autour de l'axe des z, cette courbe ayant pour projection une ellipse sur le plan des xy, et le sommet du cône étant au centre de l'ellipse. L'angle au sommet du cône est donné par la formule $\sin\gamma = \frac{1}{\alpha} = \frac{v_0 r_0}{\sqrt{v_0^2 r_0^2 + \mu'}}$.